Z matematyką stosowaną przez świat i historię

J. Banasiak

Politechnika Łódzka i Uniwersytet w Pretorii


Czy podział na matematykę (czystą) i matematykę stosowaną ma sens?

Czy to jest sztuka piękna, czy użytkowa?

Czy podział na matematykę (czystą) i matematykę stosowaną ma sens?

Czy to jest sztuka piękna, czy użytkowa?

Fresk zamówiony przez papieża Juliusza II aby wzmocnić oddziaływanie kościoła katolickiego, w tej chwili przynosi Watykanowi dochód ponad 80 milionów euro rocznie.

Matematyka czysta czy stosowana?

Liczbę λ i niezerowy wektor $\mathrm{e} = (e_1, \ldots, e_n) \neq 0$ nazywamy, odpowiednio, wartością własną i wektorem własnym macierzy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$ jeśli spełnione jest równanie

$$\begin{aligned} a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n &= \lambda e_1, \\ \vdots \qquad &= \quad \vdots, \\ a_{n1}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n &= \lambda e_n. \end{aligned}$$

Twierdzenie

Jeśli współczynniki a_{ij} są nieujemne, to (przy pewnych dodatkowych założeniach) istnieją: dodatnia wartość własna λ_{max}, taka że $\lambda_{max} > |\lambda|$ dla wszystkich innych wartości własnych λ macierzy oraz odpowiadający jej wektor własny e *o dodatanich współrzędnych, zwany wektorem Perrona.*

Twierdzenie

Jeśli współczynniki a_{ij} są nieujemne, to (przy pewnych dodatkowych założeniach) istnieją: dodatnia wartość własna λ_{max}, taka że $\lambda_{max} > |\lambda|$ dla wszystkich innych wartości własnych λ macierzy oraz odpowiadający jej wektor własny e *o dodatanich współrzędnych, zwany wektorem Perrona.*

Jeśli współczynniki a_{ij} określają interakcje pomiędzy obiektami j i i o różnej wartości w_j i w_i, to wector e (z $\lambda_{max} = 1$) podaje ranking tych obiektów. W szczególności, jeśli A opisuje połączenia pomiędzy stronami internetowymi, to e podaje ranking tych stron i algorytm znajdowania e, tzw. algorytm PageRank w wyszukiwarce Google jest wart około 25 miliardów USD.

Nauki matematyczne

Celem nauk matematycznych jest zrozumienie praw natury poprzez rozumowanie symboliczne i operowanie abstrakcyjnymi strukturami. Zatem w naukach matematycznych staramy się:

- odkryć i zanalizować związki pomiędzy tymi abstrakcyjnymi strukturami (matematyka „czysta”),

- rozwijać narzędzia pozwalające ilościowo opisywać świat zewnętrzny i starać się zrozumieć jego cechy, dopasowując je do badanych struktur abstrakcyjnych poprzez tworzenie modeli matematycznych, analizować te modele i przeformułowywać je tak by były zrozumiałe dla komputerów, oraz wykorzystywać wyników obliczeń numerycznych do interpretacji i przewidywania świata zewnętrznego (matematyka stosowana),

- rozwijać narzędzia pozwalające ilościowo opisywać świat zewnętrzny i starać się zrozumieć jego cechy, dopasowując je do badanych struktur abstrakcyjnych poprzez tworzenie modeli matematycznych, analizować te modele i przeformułowywać je tak by były zrozumiałe dla komputerów, oraz wykorzystywać wyników obliczeń numerycznych do interpretacji i przewidywania świata zewnętrznego (matematyka stosowana),
- wnioskować o własnościach świata rzeczywistego na podstawie danych obserwacyjnych używając abstrakcyjnych struktur i argumentacji, wypracowanych powyżej (statystyka matematyczna, uczenie maszynowe, sztuczna inteligencja).

Model 1. Przykładem modelu matematycznego jest wzór wiążący wysokość niespłaconej $D(k)$ części kredytu D_0 po spłaceniu k rat wysokości R przy oprocentowaniu r,

$$\begin{aligned} D(k) &= (1+r)^k D_0 - R\sum_{i=0}^{k-1}(1+r)^{k-i-1} \\ &= (1+r)^k D_0 - \left((1+r)^k - 1\right)\frac{R}{r}. \end{aligned} \tag{1}$$

W szczególności, jeśli kredyt D_0 udzielony na procent r powinien być spłacony w n ratach, to wysokość raty wynosi

$$R = \frac{rD_0}{1-(1+r)^{-n}}. \tag{2}$$

Model 2. W latach 1950–1990 odpadów radioaktywnych często pozbywano się umieszczając je w szczelnych beczkach i zatapiając w oceanie na głębokości 3–5 km. Problemem jest możliwość pęknięcia beczki przy uderzeniu o dno.

Doświadczenia laboratoryjne pokazują, że beczki mogą pęknąć przy uderzeniu z prędkością $4\,\mathrm{m/s}$.

Możemy

- wysłać łódź podwodną, która bezpośrednio zmierzy prędkość beczki na zadanej głębokości, lub
- zastosować równania mechaniki Newtona (czyli model matematyczny).

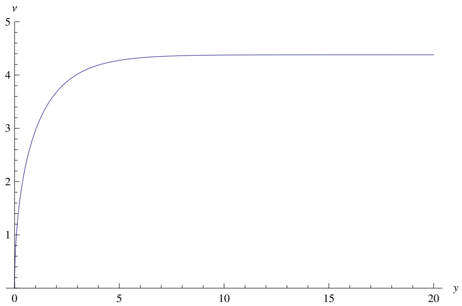
Zmiana prędkości v pojemnika na głębokości y jest dana wzorem

$$mv\frac{dv}{dy} = \left(m\mathrm{g} - B - cv^2\right), \tag{3}$$

gdzie m jest masą beczki, g przyspieszeniem ziemskim, B — siłą wyporu, zaś c — współczynnikiem siły oporu wody, zależnym od kształtu i przekroju zanurzającego się obiektu i gęstości ośrodka.

Równanie (3) ma rozwiązanie

$$v(y) = \sqrt{\frac{mg - B}{c}\left(1 - e^{-\frac{2c}{m}y}\right)}, \tag{4}$$



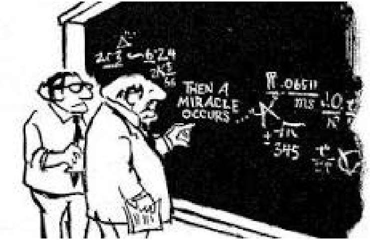
Rysunek: Prędkość beczki o masie 500 kg wypierającej 200 kg wody o współczynniku oporu 153 kg/m, jako funkcja głębokości.

Odnotujmy podstawową różnicę pomiędzy Modelem 1 a Modelem 2. W przypadku pierwszym, model jest po prostu matematycznym opisem pewnej struktury stworzonej przez nas samych, czyli nie ma wątpliwości, że wiernie opisuje on tę strukturę. W drugim przypadku, prawa Newtona odnoszą się do rzeczywistości zewnętrznej; są jej modelem matematycznym.

Skąd wiemy, że wiernie opisują one tę rzeczywistość?

- Budowanie modelu nie jest matematyką – nie można udowodnić, że model jest poprawny.
- Matematyka odpowiada na pytania o modelu, a nie o rzeczywistości.

Pytanie, jak przekroczyć barierę oddzielającą nasz umysł od świata zewnętrznego, czyli jak zbudować **model matematyczny** danego zjawiska, jest fundamentalne dla wszystkich zastosowań matematyki.



Rysunek: Myślę, że ten krok powinien być lepiej wyjaśniony

Czy modelowanie matematyczne jest w ogóle możliwe?

Czy możemy być pewni, że zgodność naszych modeli z rzeczywistością nie jest szczęśliwym przypadkiem, czyli czy wytwory naszego umysłu mają coś wspólnego ze światem fizycznym? W końcu, cytując byłego sekretarza stanu USA, Donalda Rumsfelda,

> *Są znane znane. To są rzeczy, o których wiemy, że je wiemy. Są również znane nieznane, to znaczy rzeczy o których wiemy, że ich nie wiemy. Ale są również nieznane nieznane. To są rzeczy, o których nie wiemy, że ich nie wiemy.*

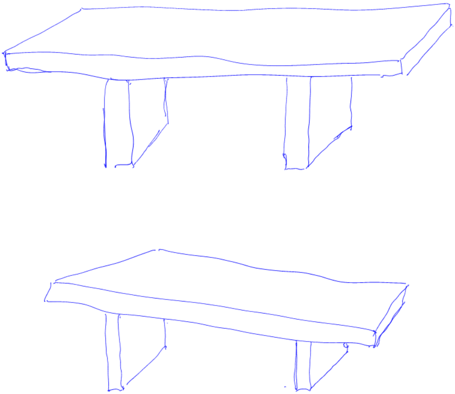
Jak sobie z tym radzono przed wiekami?

Krótka wycieczka historyczno–krajoznawcza.

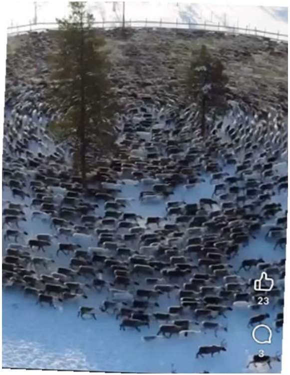
Wczesne (i nie tylko) struktury matematyczne.

Rysunek: Struktury matematyczne, ale czy świadczą one o stosowaniu wiedzy matematycznej?



Rysunek: Cieśla, który przy produkcji ławki nie uwzględniałby kierunku grawitacji, czy kąta prostego w stosunku do powierzchni ziemi, nie miałby większych szans na przekazanie swojego materiału genetycznego. Nie musiał przy tym znać Teorii Względności, ani mechaniki Newtona.



Rysunek: Woły piżmowe (rysunek lewy) i renifery tworzące okrąg obronny

Czy oznacza to, że zwierzęta znają optymalizację i wiedzą, że w tej formacji chronią jak największą część stada, wystawiając na niebezpieczeństwo absolutne minimum?

Pierwsze świadome użycie matematyki.

Matematyka pojawiła się w celach utylitarnych – można więc powiedzieć, że u podstaw matematyki leży matematyka stosowana.

Rysunek: Kość z Lebombo – pierwszy znany zapis liczenia, około 35000 lat temu

Pierwsze zastosowania matematyki poza prostym liczeniem:

Egipcjanie, Sumerowie, Akkadyjczycy, Babilończycy, około 5000 do 2500 lat temu.

,

Babilończycy byli bardziej zaawansowani od Egipcjan.

- używali systemu pozycyjnego o bazie 60,
- nie znali pojęcia zera, ale w systemie pozycyjnym zaznaczali je pustym miejscem,
- znali ułamki, ale nie wszystkie były dopuszczalne,
- potrafili wyciągać pierwiastki kwadratowe,
- potrafili rozwiązywać układy równań liniowych,
- potrafili rozwiązywać równania kwadratowe i niektóre sześcienne,
- znali trójki pitagorejskie,
- robili pomiary okręgów.

Przykład babilońskiego zadania matematycznego

Znalazłem kamień, ale go nie zważyłem; wpierw usunąłem jego jedną siódmą, potem dodałęm jedną jedenastą, potem odjąłem jedną trzynastą. Wtedy zważyłem, co pozostało i otrzymałem 1 ma-na. Jaka była waga znalezionego kamienia? [Odpowiedź: kamień ważył 1 ma-na, $9\frac{1}{2}$ gin, i $2\frac{1}{2}$ se.

Jak zaznaczyłem, Babilończycy używali układu pozycyjnego, tak jak my używamy systemu indyjsko-arabskiego. Był to znacznie lepszy system liczenia, niż wprowadzony później i używany w Europie do późnych wieków średnich system rzymski.

Mnożenie w systemie rzymskim.

17	42
XVII	**XXXXII**
VIII	~~LXXXIIII~~
IIII	~~CLXVIII~~
II	~~CCCXXXVI~~
I	**DCLXXII**
	= DCCXIIII
	= DCCXIV
	714

61	14
LXI	**XIIII**
XXX	~~XXVIII~~
XV	**LVI**
VII	**CXII**
III	**CCXXIIII**
I	**CCCCXXXXVIII**
	= DCCCLIIII
	= DCCCLIV
	854

14	61
XIIII	~~LXI~~
VII	**CXXII**
III	**CCXXXXIIII**
I	**CCCCLXXXVIII**
	= DCCCLIIII
	= DCCCLIV
	854

,

Jest to jeden z wczesnych przykładów zniszczenia wyższej kultury przez niższą, ale silniejszą.

Nadchodzą Grecy...

Pierwsze udokumentowane pojęcie abstrakcji (idee Platońskie) i dowodu matematycznego.

Rysunek: Pitagoras, 580 – 500 p.n.e., Platon 428–423 – 348/347 p.n.e.

Europejską tradycję filozoficzną można najkrócej scharakteryzować jako przypiski do Platona (A.N. Whitehead)

Platon wprowadził koncepcję

Bóg jest geometrą,

i (w *Timajosie*) przyporządkował żywiołom bryły platońskie

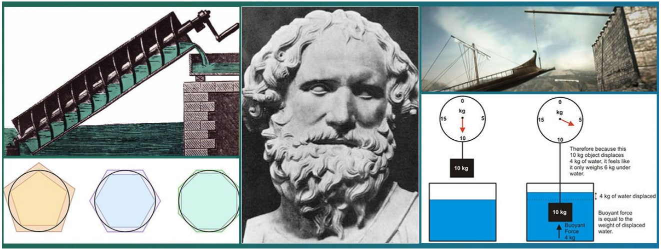
(odkryte przez pitagorejczyków):

Pitagorejczycy rozwinęli tę myśl, stwierdzając

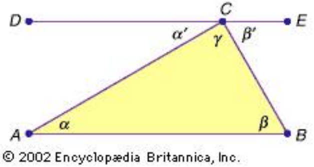
> *Liczby nie są tylko narzędziami, ale stanowią podstawowe cegiełki z których zbudowana jest rzeczywistość. Zatem Wszechświat funkcjonuje w oparciu o prawa matematyki.*

,

Życie toczyło się też z dala od Aten...



,



Rysunek: Archimedes, 287 – 212 p.n.e., Euclides, o. 300 p.n.e.

Przeciwko Szkole Ateńskiej...

Rysunek: Sekstus Empiryk, 2–3 wiek n.e., Przeciwko Matematykom

Sceptycyzm pyrroński: Aby stwierdzić prawdę, musimy mieć jej kryterium. Kryterium to może być dowolnie wymyślone, albo zatwierdzone przez jakiegoś sędziego. Jeśli jest dowolne, jak można mu ufać? Jeśl jest zatwierdzone, to albo sędzia jest zatwierdzony, albo wybrany w sposób dowolny. I tak w nieskończoność... . Pewna wiedza jest niemożliwa.

Trzy podstawowe opinie o modelowaniu matematycznym.

• „Bóg jest geometrą" — tak, modelowanie jest skuteczne, bo świat jest zbudowany według zrozumiałych przez nas reguł (geometrycznych, algebraicznych...).

Trzy podstawowe opinie o modelowaniu matematycznym.

• „Bóg jest geometrą" — tak, modelowanie jest skuteczne, bo świat jest zbudowany według zrozumiałych przez nas reguł (geometrycznych, algebraicznych...).

• Nie, cała nauka jest zgadywaniem – mamy dużo szczęścia, jeśli udaje się nam coś przewidzieć.

Trzy podstawowe opinie o modelowaniu matematycznym.

• „Bóg jest geometrą" — tak, modelowanie jest skuteczne, bo świat jest zbudowany według zrozumiałych przez nas reguł (geometrycznych, algebraicznych...).

• Nie, cała nauka jest zgadywaniem – mamy dużo szczęścia, jeśli udaje się nam coś przewidzieć.

• Podejście „Po drugiej stronie zwierciadła" – prawda leży pośrodku; wyewoluowaliśmy wraz ze światem zewnętrznym (kąt prosty, właściwości okregu), a zatem nasz aparat poznawczy musi być przynajmniej do pewnego stopnia wiernym odbiciem świata zewnętrznego i praw nim rządzących, gdyż inaczej nie przetrwalibyśmy. (K. Lorenz, nagroda Nobla w 1973)

Dyskusja nad nimi trwa do dziś...

Czyli matematyka jest

- w najgorszym przypadku, językiem nauki,
- w najlepszym, szóstym zmysłem, pomostem pomiędzy naszym umysłem, a wszechświatem.

Dyskusja nad nimi trwa do dziś...

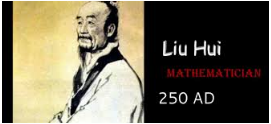
Czyli matematyka jest

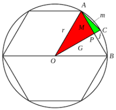
• w najgorszym przypadku, językiem nauki,

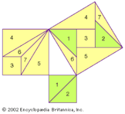
• w najlepszym, szóstym zmysłem, pomostem pomiędzy naszym umysłem, a wszechświatem.

Poszukujemy więc odpowiedzi na pytanie, czy dzięki matematyce nasz umysł może przekroczyć granice wyznaczone przez zmysły, konstruując obiekty myślowe mające swoje odpowiedniki we wszechświecie, a niedostępne bezpośrednio dla zmysłów, i czy możemy w wiarygodny sposób używać tych obiektów do przewidywania zdarzeń, które mogą być bezpośrednio weryfikowane.

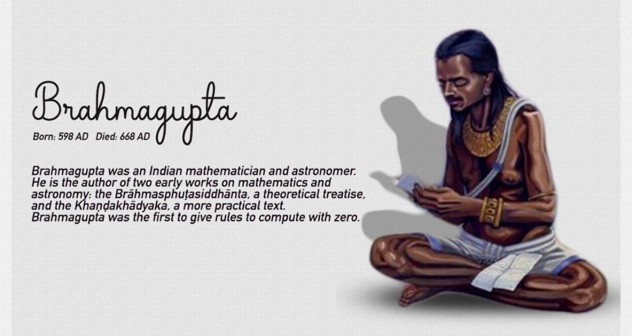
Tym czasem w Chinach i gdzie indziej... Pomimo spalenia ksiąg i pogrzebania żywcem 460 konfucjańskich uczonych, zarządzonego przez cesarza Qin Shi Huanga aby zniszczyć tradycję filozoficzną Stu Szkół (V–II wiek p.n.e) i wzmocnić narrację władcy, matematyka przetrwała:



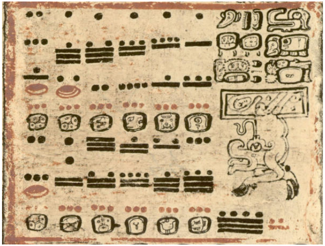


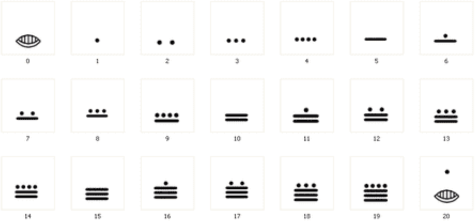


Możliwe, że używał liczb ujemnych jeszcze przed Brahmaguptą...

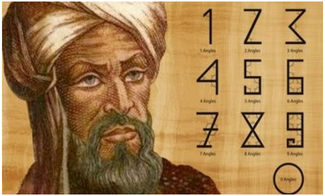


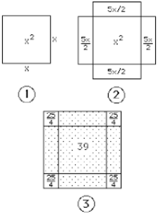
Jako pierwszy podał reguły arytmetyczne działań z użyciem zera...





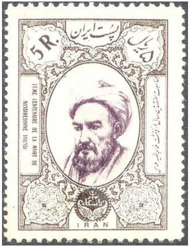
Majowie, o. 400 r. p.n.e do o. 1000 r. n.e.





Muhammad ibn Musa al-Chuwarizmi, o. 780 r. n.e. do o. 850 r. n.e., ojciec algebry, przekład jego książki na łacinę wprowadził system pozycyjny i cyfry arabskie (pochodzące z Indii) w Europie; wprowadził funkcje trygonometryczne.

Nasir al-Din al-Tusi, 1201–1274



Rysunek: Para al-Tusiego – złożenie ruchów po okręgach daje ruch prostoliniowy

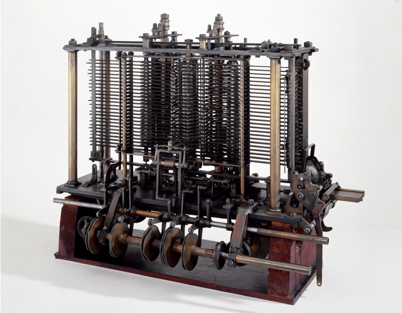
Odkrywca twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Nie mamy przekonujących dowodów, że filozoficzne pytania o to, czy matematyka wiernie oddaje rzeczywistość dręczyły innych uczonych poza Grekami. Wydaje się, że podejście do matematyki było czysto utylitarne – była ona rozwijana jako narzędzie wspomagające rozwój innych dyscyplin, inżynierii, kartografii, astronomii. Warto zaznaczyć, że astronomia była wówczas nauką jak najbardziej stosowaną. Podstawowymi zastosowaniami były:

- nawigacja,
- astrologia,
- religia (obliczanie faz księżyca określające początek Ramadanu i czas modlitw).

Nie odrzucajmy wagi rozwoju narzędzi w historii – większości idei nie daje się zrealizować bez stosownych narzędzi.



Programowalny komputer Ch. Babbage's zawierał wszystkie rozwiązania komputerów współczesnych, ale klasyczna mechanika nie mogła ich zrealizować.

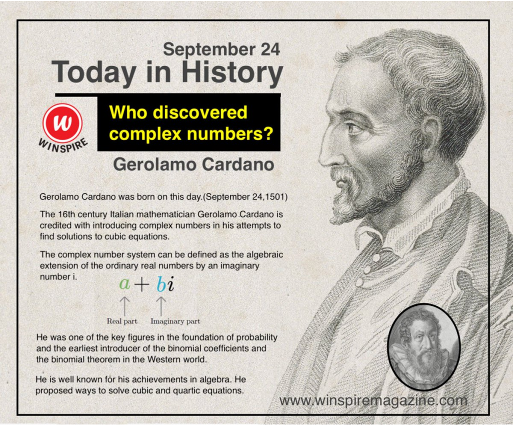
Pięknym przykładem ewolucji pomysłu od sztuczki matematycznej do fundamentalnej idei filozoficznej jest historia liczb zespolonych. Aby ją opisać, przenieśmy się do renesansowych Włoch.

Dlaczego Włochy?

Łaciński patriarcha Konstantynopola, Basil Bessarion, zdążył wywieźć bibliotekę przed zajęciem go przez Imperium Osmańskie. Jego biblioteka liczyła kilkaset manuskryptów; osobiście przetłumaczył szereg prac greckich autorów na łacinę, m.in. Platona i Arystotelesa.

Renesansowe MMA – równania trzeciego i czwartego rzędu.

- del Ferro wiedział, jak rozwiązać jeden typ, ale trzymał to w tajemnicy, ujawniając tylko Fiorowi w chwili śmierci.
- Fior wyzwał Tartaglię na publiczny pojedynek – Tartaglia znalazł sposób rozwiązywania ogólnych równań na dzień przed.
- Cardano przekupił Tartaglię, aby zdradził mu ten sposób pod warunkiem, że Cardano go nie ujawni.
- Cardano z Ferrarim zdołali uogólnić ten wynik na równania czwartego rzędu, ale gdy się dowiedział, że metoda pochodzi od del Ferro, uznał, że umowa z Tartaglią go już nie obowiązuje, opublikowali ją jako metodę del Ferro.
- Tartaglia wyzwał Ferrariego, ale oddał pojedynek walkowerem.



Rysunek: Girolamo Cardano (1501-1576) i przegub Cardana

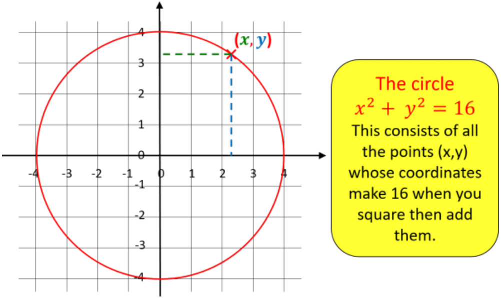
Ewolucja pojęcia liczby.

Liczby powinny reprezentować coś w świecie realnym - stąd pojęcie dopuszczalnych ułamków w matematyce babilońskiej, opór przez zerem i liczbami ujemnymi...

- Cardano zauważył, że konstruując rzeczywiste rozwiązania równań sześciennych warto „udawać", że istnieją obiekty typu $\sqrt{-1}$, które w rachunkach się znoszą, dając wynik rzeczywisty.
- Kartezjusz negował ich istnienie i ukuł pojęcie liczby urojonej.
- Euler i Gauss wykazali, że liczby zespolone $a+\sqrt{-1}b$ są dobrze zdefiniowanymi obiektami matematycznymi.
- Dla inżynierów i fizyków liczby zespolone są idealnym językiem dla opisu ruchu falowego ($z(\phi) = re^{i(\pi+\phi)} + re^{i(\pi-\phi)}$ w parze al-Tusiego).
- Podstawowa w mechanice kwantowej funkcja falowa istnieje tylko w dziedzinie zespolonej – świat rzeczywisty jest tylko platońskim cieniem świata zespolonego.

Zjednoczenie geometrii i algebry.

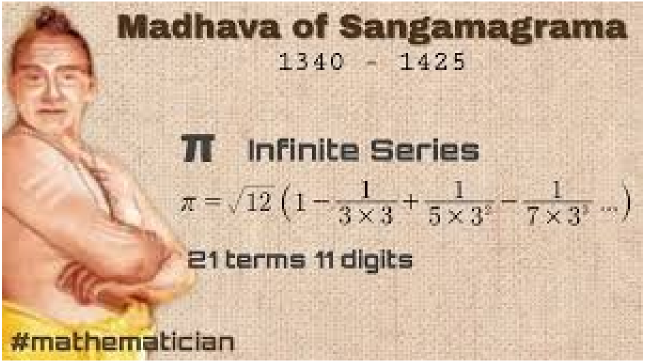
Na razie, matematyka jest arystotelesowska, statyczna. Możliwy ruch jest jednostajny po wyznaczonych trajektoriach. Aby umożliwić dynamikę, trzeba wpierw połączyć przestrzeń z liczbami.



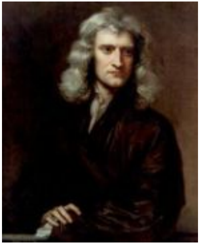
Rysunek: Kartezjusz i algebraiczna opis okręgu

Rachunek różniczkowy – opanowanie nieskończoności.

Choć już w XIV w. w Indiach wykorzystywano sumy nieskończone, na przykład do wyznaczania warości liczby π,



przyjmuje się, że twórcami rachunku różniczkowego są I. Newton i G. Leibniz.

Rysunek: Isaac Newton i Gottfried W. Leibniz

System stworzony przez Newtona jest pierwszym kompletnym modelem matematycznym Wszechświata we współczenym rozumieniu tego terminu.

Dyskusje, czy matematyka może reprezentować rzeczywistość niedostepną naszym zmysłom od lat zajmuje poczesne miejsce w dyskursie filozoficznym, jednak rozstrzygnięcia sporu nie widać.

Rysunek: I. Kant, B. Russell, G. Frege, D. Hilbert, K. Gödel, K. Lorenz

Być może, gdyby w starożytności wszyscy byli filozofami i matematykami, koło nie zostałoby nigdy wynalezione – w końcu żadne koło nie jest idealnym okręgiem. Szczęśliwie, musiało być wśród nich kilku inżynierów, którzy nie przejmowali się zgodnością ideału z praktyką i korygowali błędy kiedy się pojawiały.

Podobnie obecnie, stosujemy podejście Lorenza i budując modele matematyczne stosujemy zasadę ograniczonego zaufania – wyniki wykraczające poza codzienne doświadczenie powinniśmy traktować z dużą dozą sceptycyzmu. Tak naprawdę,

- *Każdy model jest błędny; pytaniem praktycznym jest, jak błędny musi on być, aby przestał być użyteczny.*

Choć nie można udowodnić, że jakiś model jest poprawny, są jednak modele bardzo złe i całkiem dobre. Dobry model:

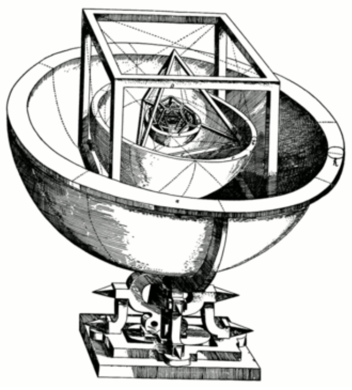
- Pozwala przewidywać — modele są budowane na podstawie zbioru danych doświadczalnych zebranych w określonych warunkach. Jeśli jesteśmy w stanie wykonać podobne doświadczenie w innych warunkach, to otrzymane dane powinny zgadzać się z przewidywaniami modelu. Przykładowo:
  - ogólna teoria względności — ugięcie światła, fale grawitacyjne, spowolnienie czasu w nawigacji satelitarnej;
  - równania Diraca — istnienie pozytonów;
  - teoria standardowa — istnienie bozonu Higgsa.

- Zawiera wcześniejsze sprawdzające się modele jako podmodele:
  - mechanika Newtona jest zawarta w teorii względności (szczególnej i ogólnej) jeśli rozpatrujemy prędkości małe w stosunku do prędkości światła i rejony odległe od dużych mas;
  - mechanika kwantowa daje te same wyniki, co mechanika Newtona jeśli rozpatrujemy obiekty dużych rozmiarów.

Zły model.

Johannes Kepler: 5 brył platońskich i 6 znanych planet, Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz i Saturn — przypadek? Jeśli bowiem na sferze o promieniu orbity Merkurego opisać ośmiościan, a na nim opisać następną sferę, to jej promień odpowiadać będzie promieniowi orbity Wenus. Jeśli na tej drugiej sferze opisać dwudziestościan, a na nim kolejną trzecią sferę, to jej promień odpowiada promieniowi orbity Ziemi. I tak kolejno dla następnych wielościanów foremnych i planet: dwunastościan – Mars, czworościan – Jowisz, sześcian – Saturn.

Wyliczone promienie orbit zgadzały się mniej więcej z ówczesnymi obserwacjami, lub ich uśrednione zachowanie.



Prostota i logika modelu i jego zgodność z obserwacjami niewiele mówią o jego poprawności.