

Od modelu Malthusa, przez łańcuchy Markova, aż po teorię Darwina

Mateusz Krukowski

Początki biomatematyki?



Początki biometryki?



Leonardo di Pisa [Fibonacci] published "Liber abaci" in 1202 rediscovering the series
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

The ratio of consecutive terms approximates to the Golden Number Φ
$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = 1.61803$$

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \dots$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$
 Binet

Fibonacci	Golden Number	Lucas
$F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ $F_1 = 1; F_2 = 1$	$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} = \Phi$	$L_n + L_{n+1} = L_{n+2}$ $L_1 = 1; L_2 = 3$
1	$\Phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$	1
1	$\Phi^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 3)$	3
2	$\Phi^3 = \frac{1}{2}(2\sqrt{5} + 4)$	4
3	$\Phi^4 = \frac{1}{2}(3\sqrt{5} + 7)$	7
5	$\Phi^5 = \frac{1}{2}(5\sqrt{5} + 11)$	11
8	$\Phi^6 = \frac{1}{2}(8\sqrt{5} + 18)$	18
13	$\Phi^7 = \frac{1}{2}(13\sqrt{5} + 29)$	29
21	$\Phi^8 = \frac{1}{2}(21\sqrt{5} + 47)$	47

A large, detailed illustration of a rabbit's head and shoulders, facing forward. To the right of the rabbit, there are several smaller, simpler line drawings of rabbits in various poses: one sitting, one standing, one facing left, one facing right, and one facing forward.

Początki biomatematyki?

December

Young black couple

January

Black couple now adult

February

Red twins for Black couple

March

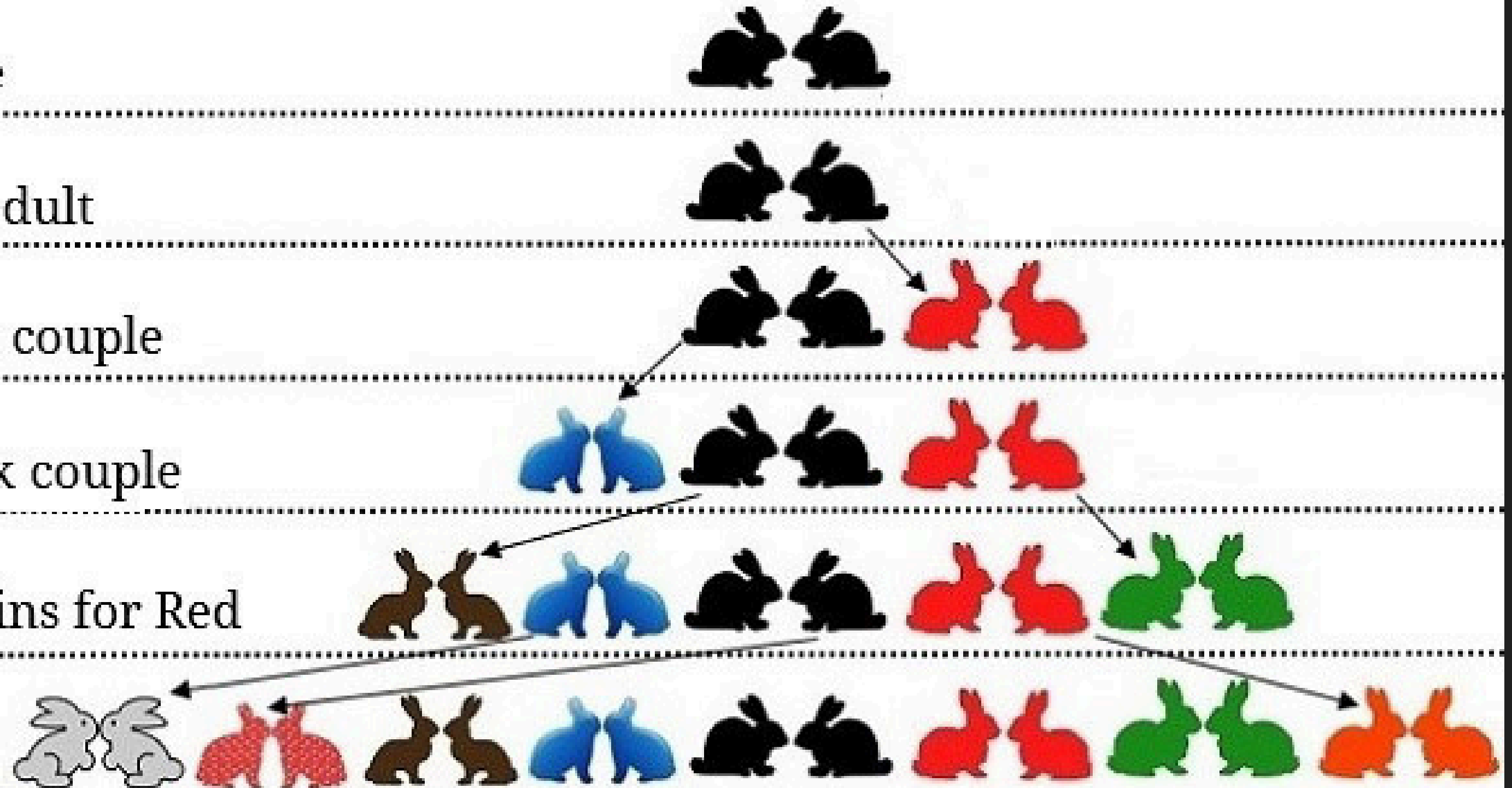
Blue twins for Black couple

April

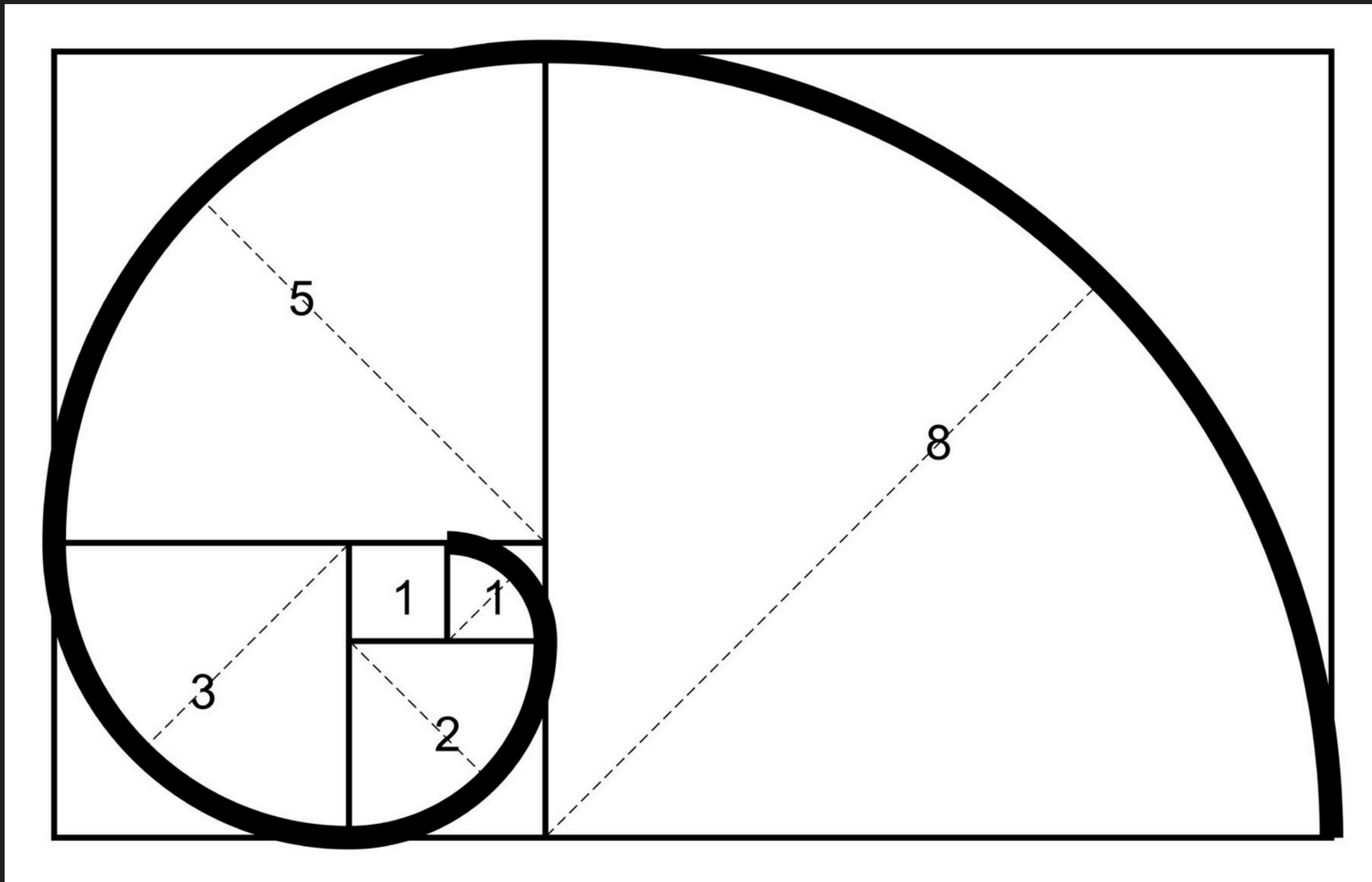
Twins for Black, twins for Red

May

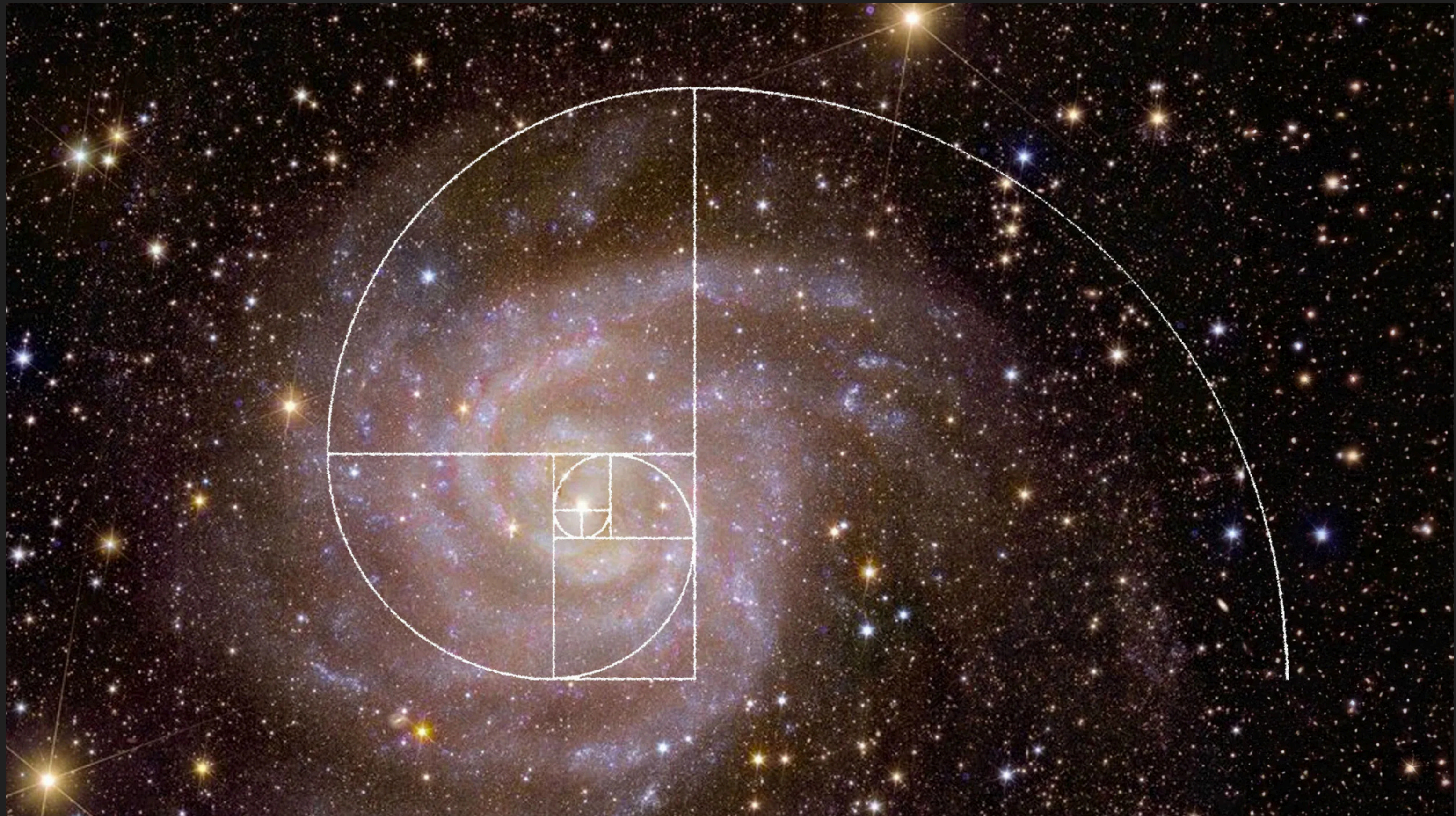
Twins for Black,
Red, Blue couples



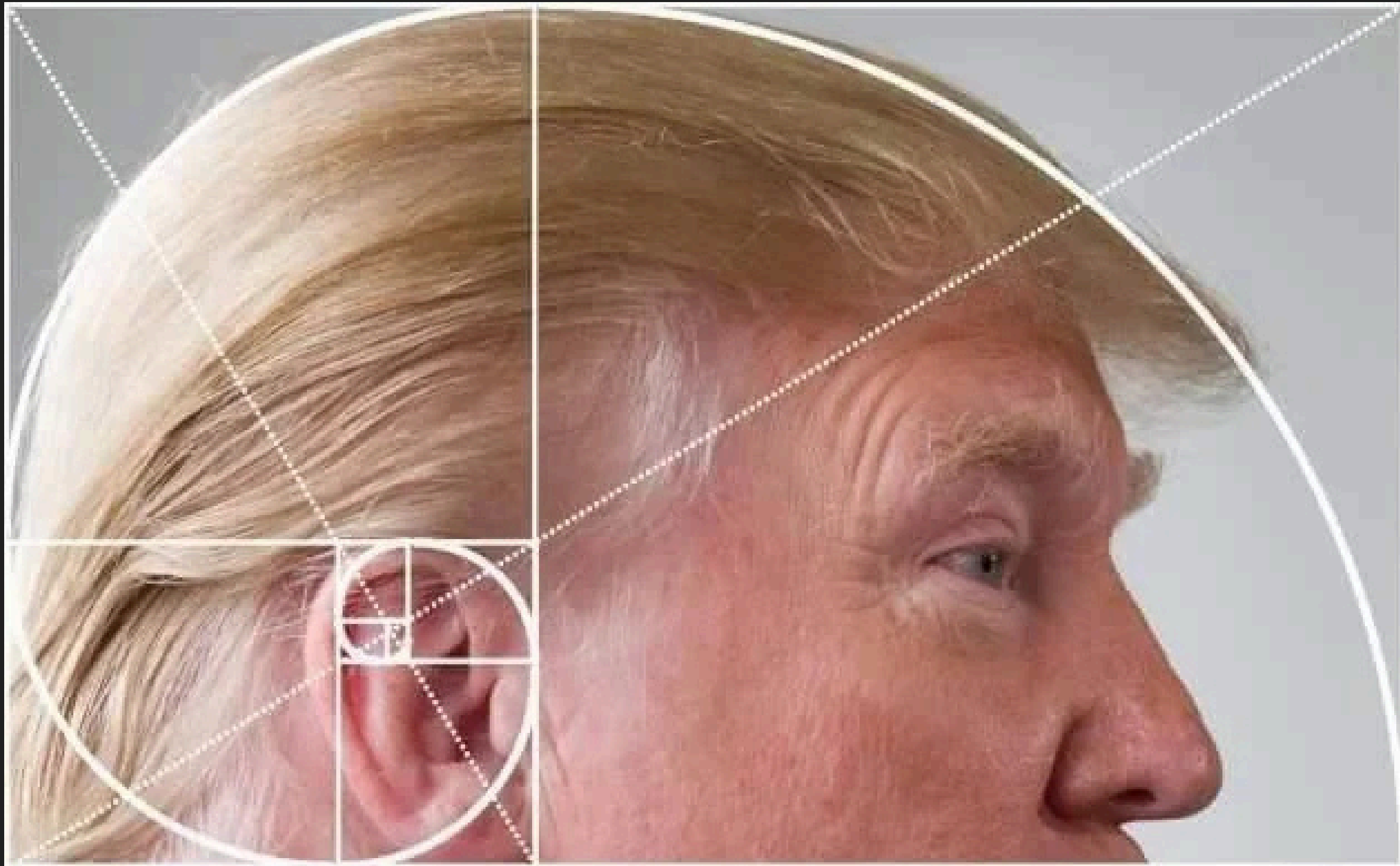
Początki biomatematyki?



Początki biomatematyki?



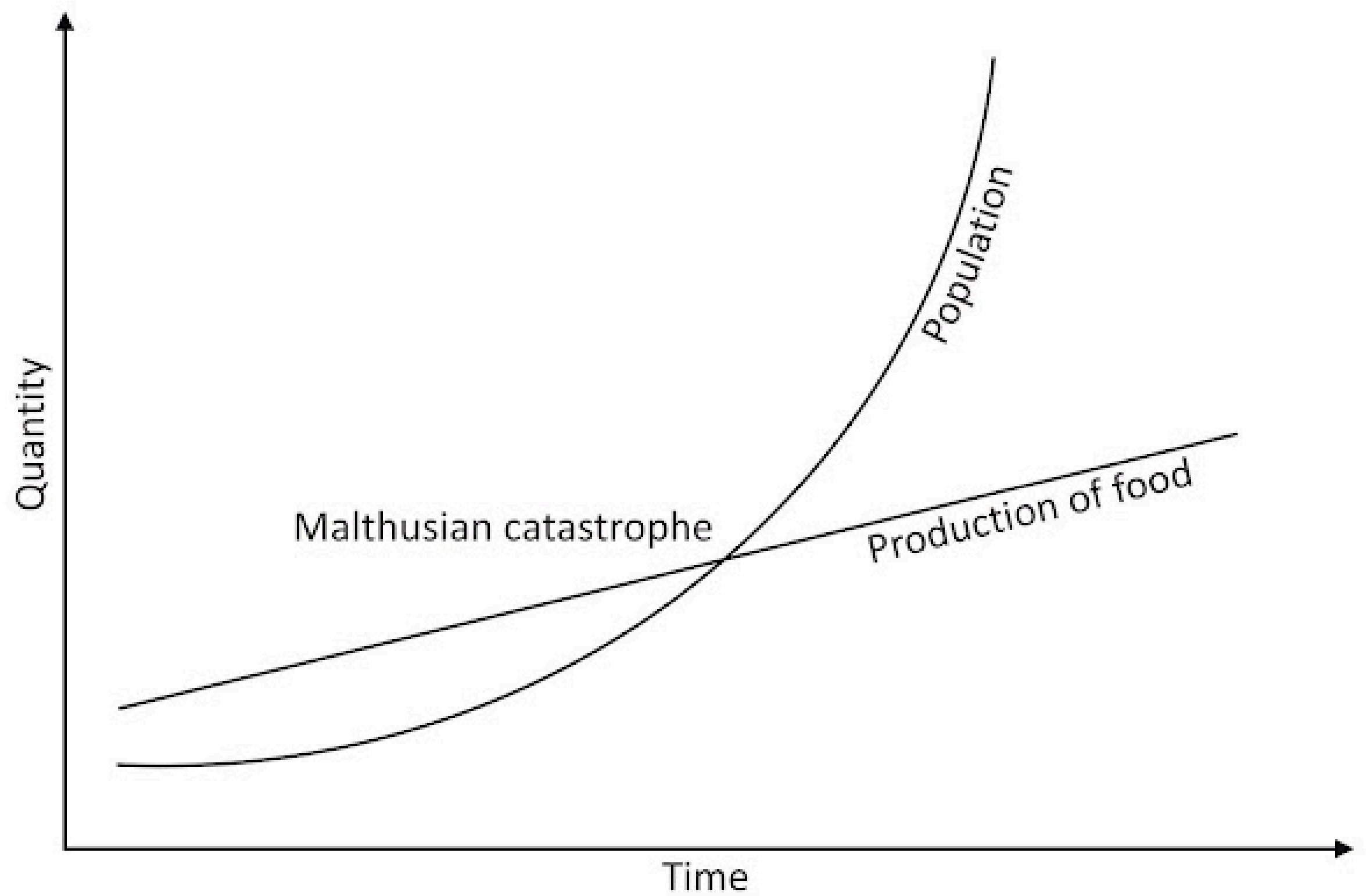
Początki biometryki?



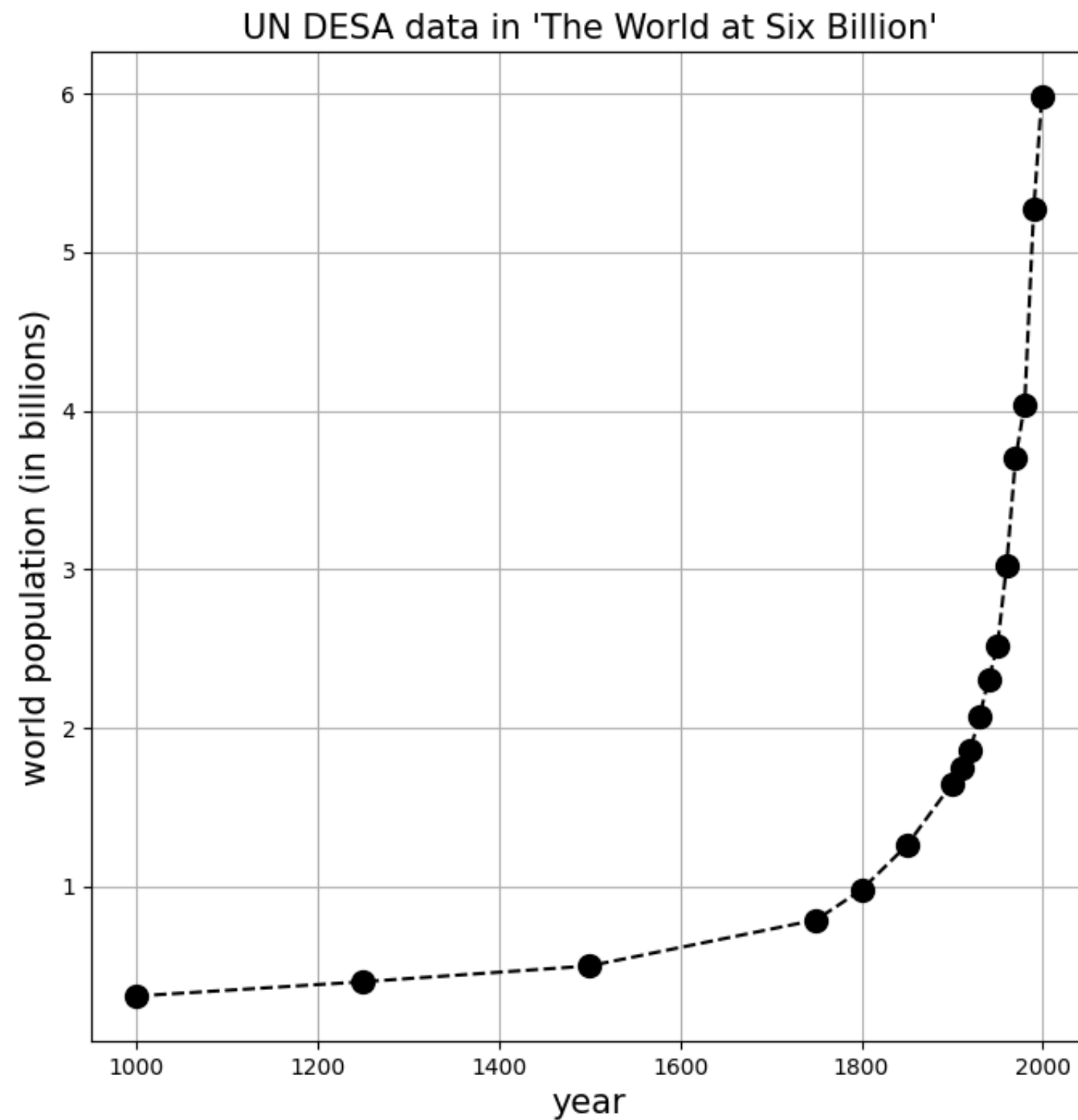
Model Malthusa



Model Malthusa



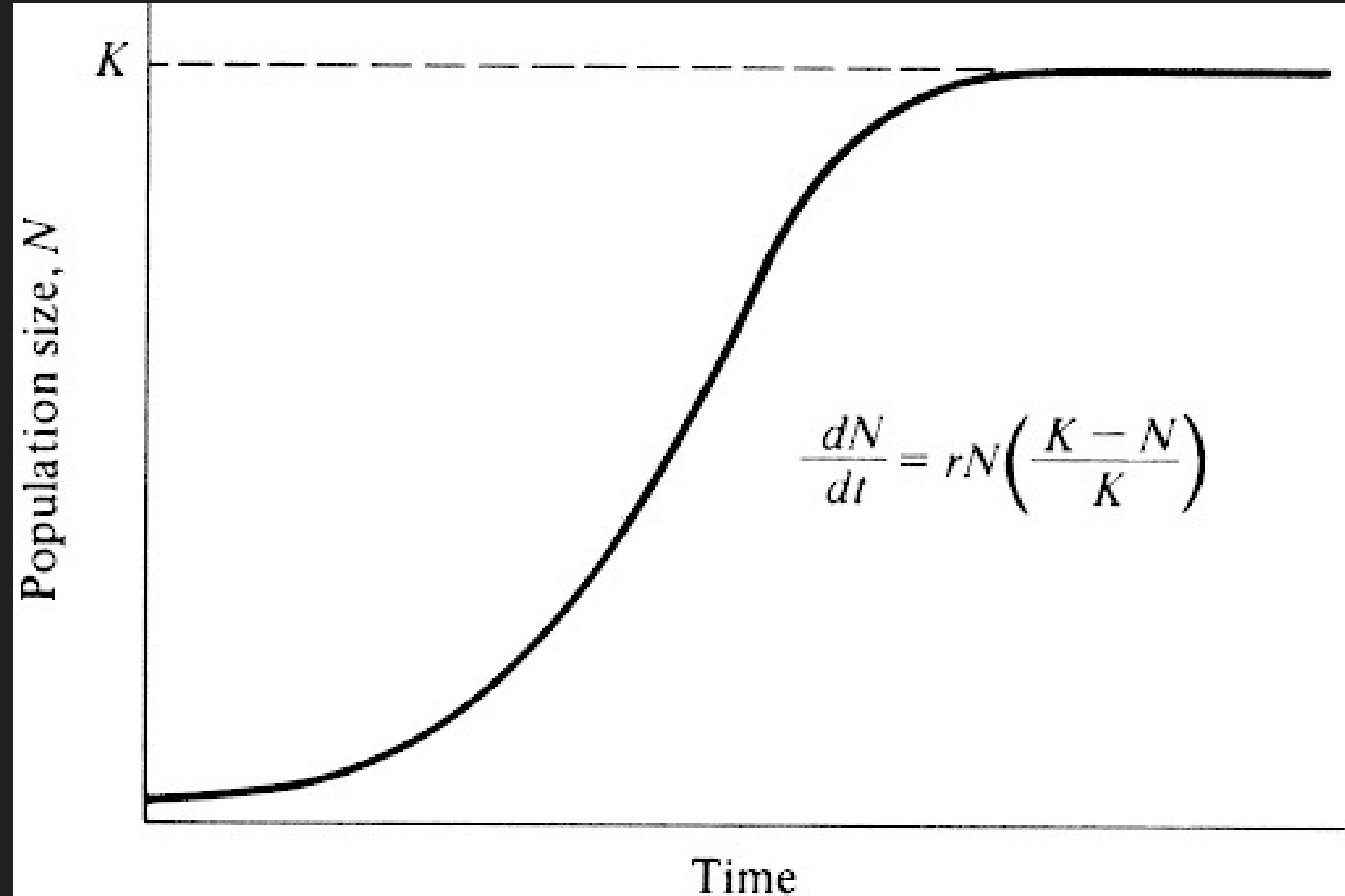
Model Malthusa



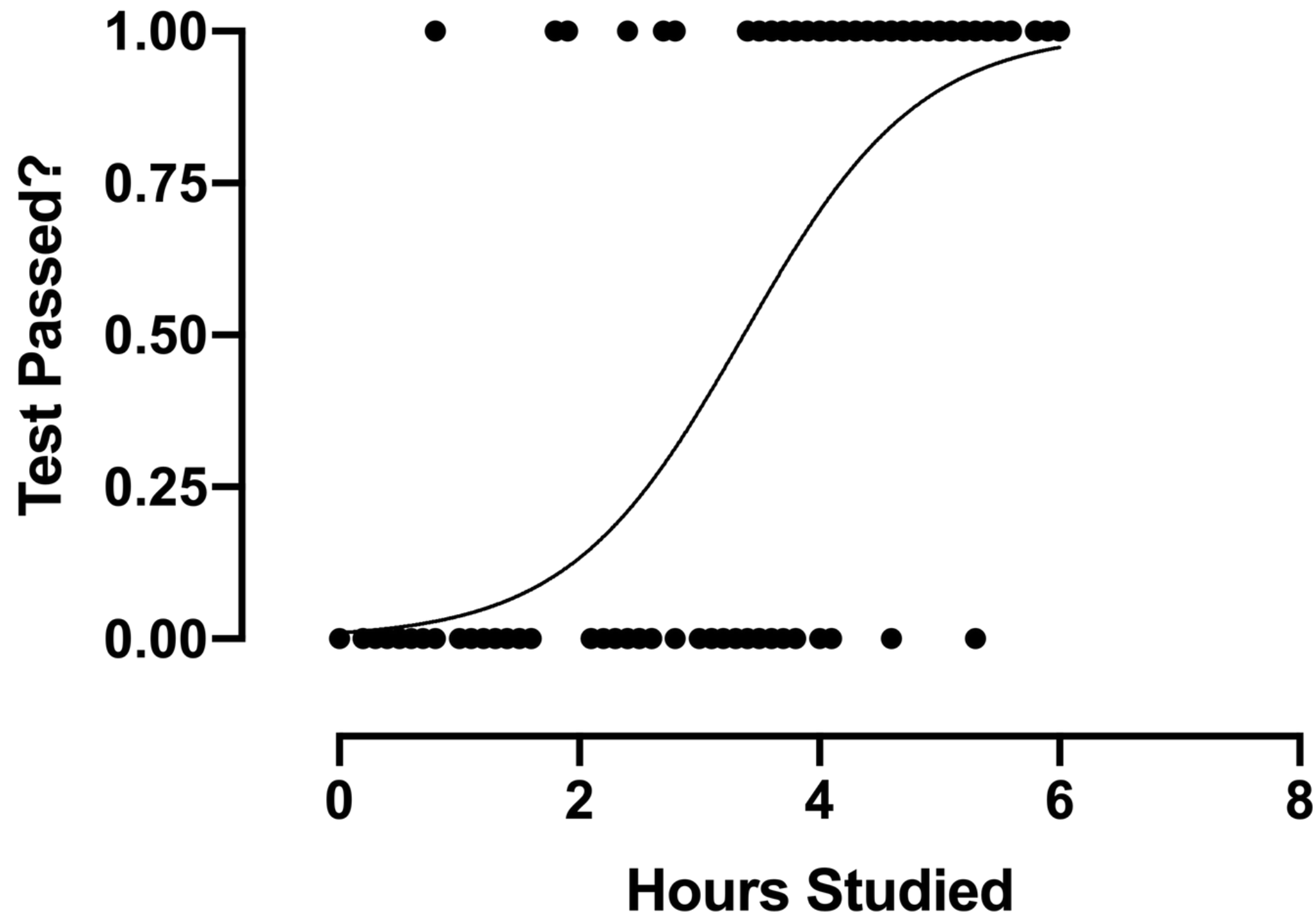
Poprawka logistyczna Verhulsta



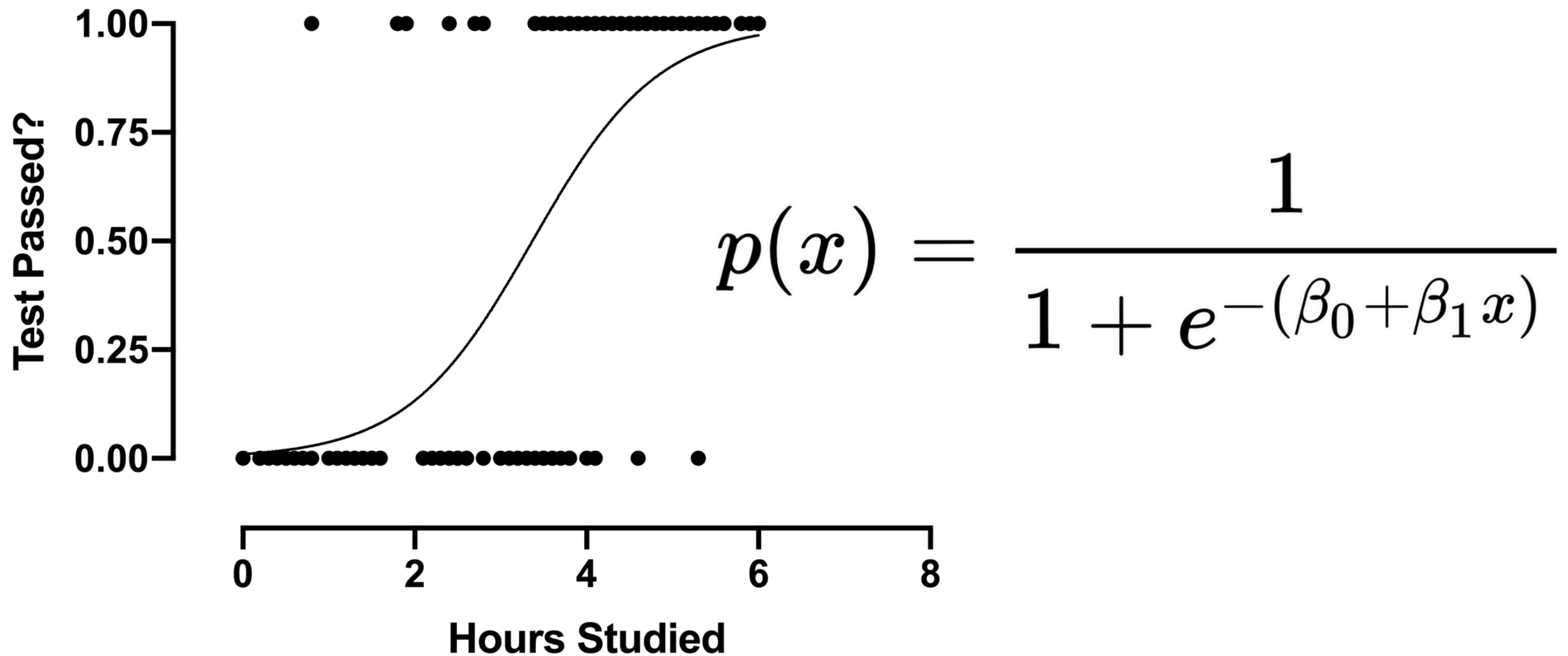
Poprawka logistyczna Verhulsta



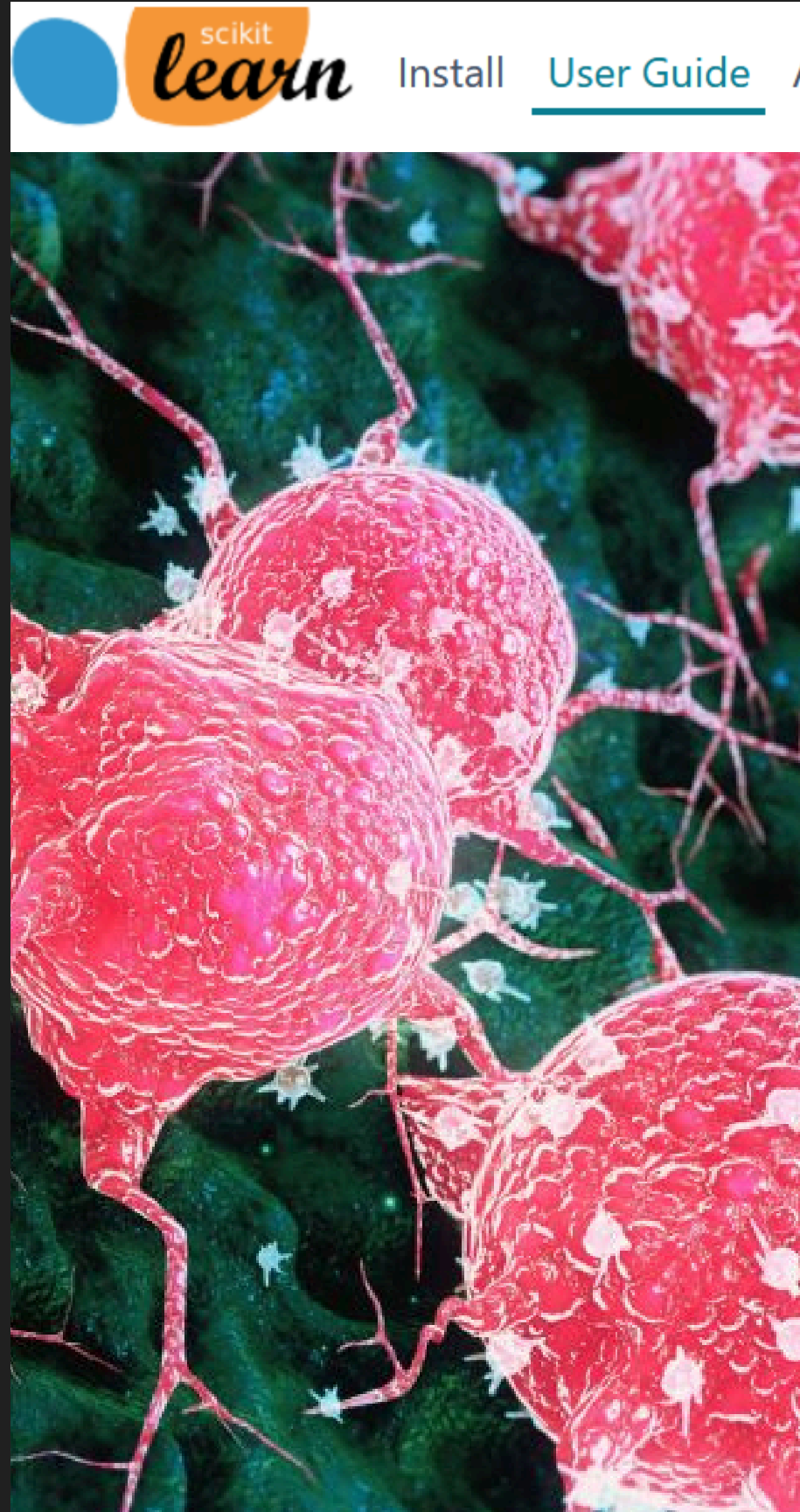
Analiza danych: regresja logistyczna



Analiza danych: regresja logistyczna



Przykłady klasyfikacji (scikit.datasets)

[Install](#)[User Guide](#)[API](#)[Examples](#)[Community](#)[More](#)

7.1.6. Breast cancer wisconsin (diagnostic) dataset

Data Set Characteristics:

Number of Instances: 569

Number of Attributes: 30 numeric, predictive attributes and the class

Attribute Information:

- radius (mean of distances from center to points on the perimeter)
- texture (standard deviation of gray-scale values)
- perimeter
- area
- smoothness (local variation in radius lengths)
- compactness ($\text{perimeter}^2 / \text{area} - 1.0$)
- concavity (severity of concave portions of the contour)
- concave points (number of concave portions of the contour)
- symmetry

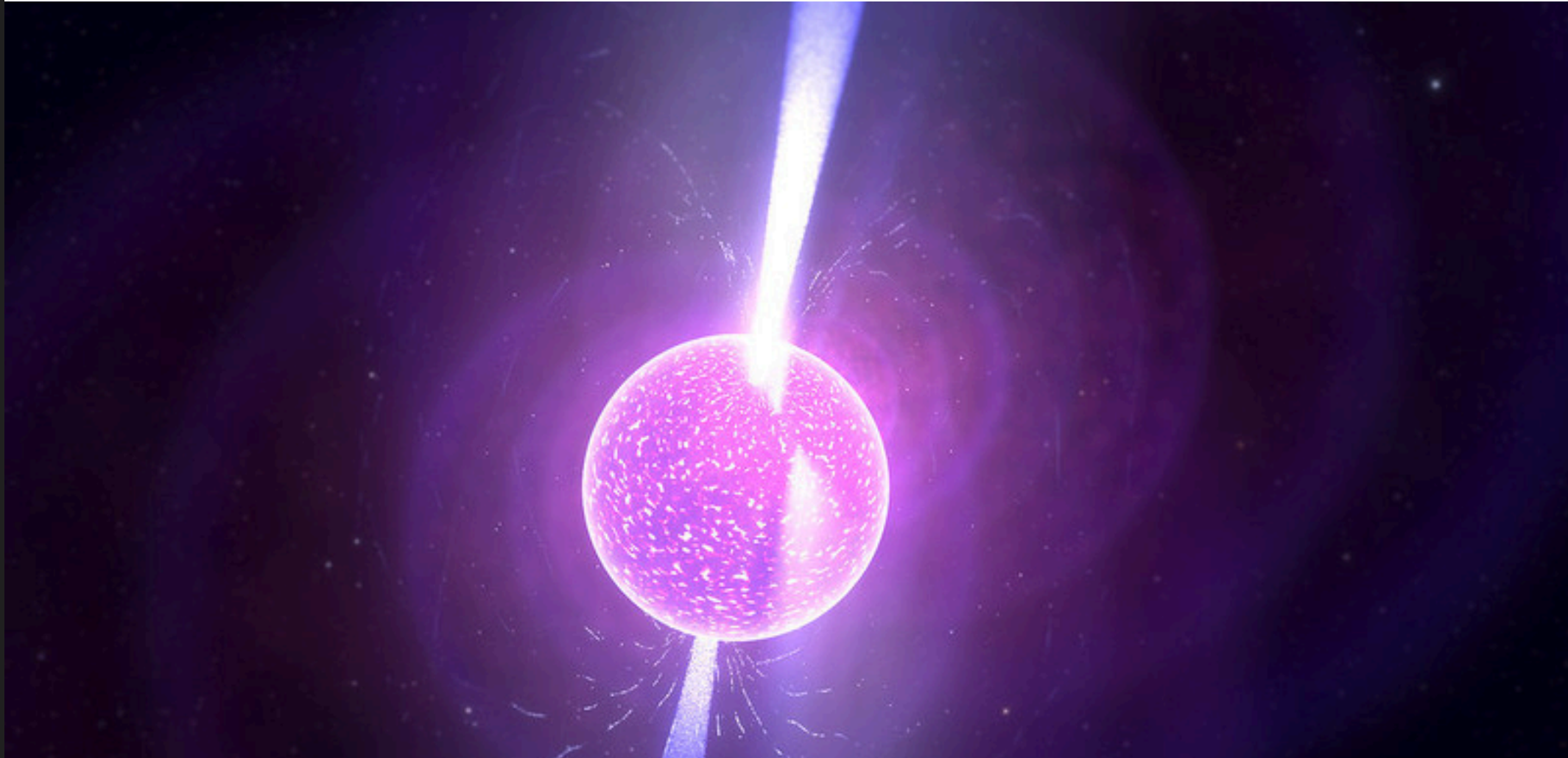
Przykłady klasyfikacji (UCI ML Repository)

**HTRU2**
Donated on 2/13/2017

Pulsar candidates collected during the HTRU survey. Pulsars are a type of star, of considerable scientific interest. Candidates must be classified in to pulsar and non-pulsar classes to aid discovery.

Dataset Characteristics	Subject Area	Associated Tasks
Multivariate	Physics and Chemistry	Classification, Clustering

Feature Type	# Instances	# Features
Real	17898	8



DOWNLOAD (1.5 MB)

IMPORT IN PYTHON

CITE

” 1 citations

👁 13395 views

Citations/Acknowledgements

If you use this dataset, please cite:

If you use the dataset in your work, please cite us using the following paper:

R. J. Lyon, B. W. Stappers, S. Cooper, J. M. Brooke, J. D. Knowles, Fifty Years of Palsa...

▼

Creators

👤 Robert Lyon

DOI

10.24432/C5DK6R

License

This dataset is licensed under a [Creative](#)

Przykłady klasyfikacji (UCI ML Repository)



HIGGS

Donated on 2/11/2014

This is a classification problem to distinguish between a signal process which produces Higgs bosons and a background process which does not.

Dataset Characteristics	Subject Area	Associated Tasks
-	Physics and Chemistry	Classification

Feature Type	# Instances	# Features
Real	11000000	-

[DOWNLOAD \(2.6 GB\)](#)

[CITE](#)

” 1 citations

👁 21851 views

Creators

👤 Daniel Whiteson

DOI

10.24432/C5V312

License

This dataset is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International \(CC BY 4.0\)](#) license.

This allows for the sharing and adaptation of the datasets for any purpose, provided that the appropriate credit is given.



Ewolucja w modelu Malthusa-Verhulsta

Założenia modelu:

Ewolucja w modelu Malthusa-Verhulsta

Założenia modelu:

- początkowa populacja składa się z królików biegających z tą samą (uśrednioną) prędkością

Ewolucja w modelu Malthusa-Verhulsta

Założenia modelu:

- początkowa populacja składa się z królików biegających z tą samą (uśrednioną) prędkością
- potomstwo królików może biegać z różną prędkością, według rozkładu (pseudo)normalnego

Ewolucja w modelu Malthusa-Verhulsta

Założenia modelu:

- początkowa populacja składa się z królików biegających z tą samą (uśrednioną) prędkością
- potomstwo królików może biegać z różną prędkością, według rozkładu (pseudo)normalnego
- króliki z niską prędkością mają większą śmiertelność niż króliki z większą prędkością

Ewolucja w modelu Malthusa-Verhulsta

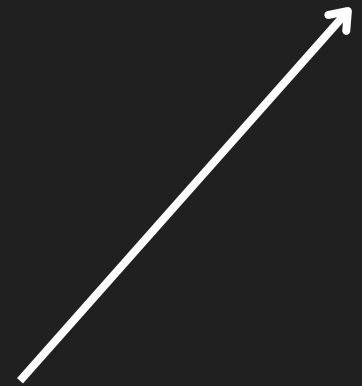
Założenia modelu:

- początkowa populacja składa się z królików biegających z tą samą (uśrednioną) prędkością
- potomstwo królików może biegać z różną prędkością, według rozkładu (pseudo)normalnego
- króliki z niską prędkością mają większą śmiertelność niż króliki z większą prędkością

Pytanie: Jak będzie wyglądała populacja królików w dużym horyzoncie czasowym?

Ewolucja w modelu Malthusa-Verhulsta

$$P_{n+1}(v) =$$



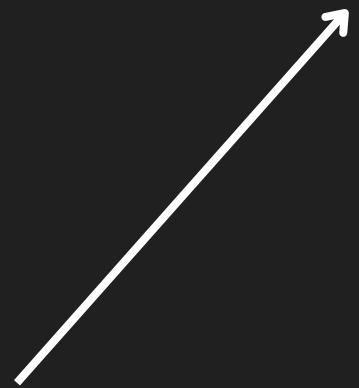
Liczba królików w kolejnym
pokoleniu o prędkości v

Ewolucja w modelu Malthusa-Verhulsta

Stare pokolenie wymiera,
śmiertelność zależy od prędkości v



$$P_{n+1}(v) = (1 - f_{mort}(v))P_n(v)$$



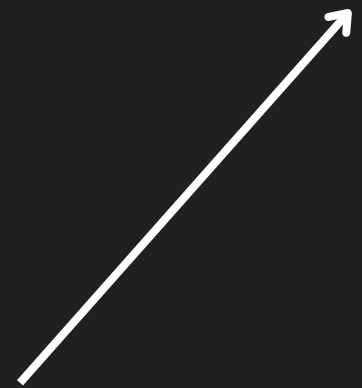
Liczba królików w kolejnym
pokoleniu o prędkości v

Ewolucja w modelu Malthusa-Verhulsta

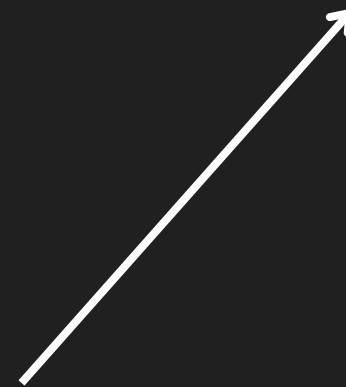
Stare pokolenie wymiera,
śmiertelność zależy od prędkości v



$$P_{n+1}(v) = (1 - f_{mort}(v))P_n(v) + bP_n \star f_{mut}(v)$$



Liczba królików w kolejnym
pokoleniu o prędkości v

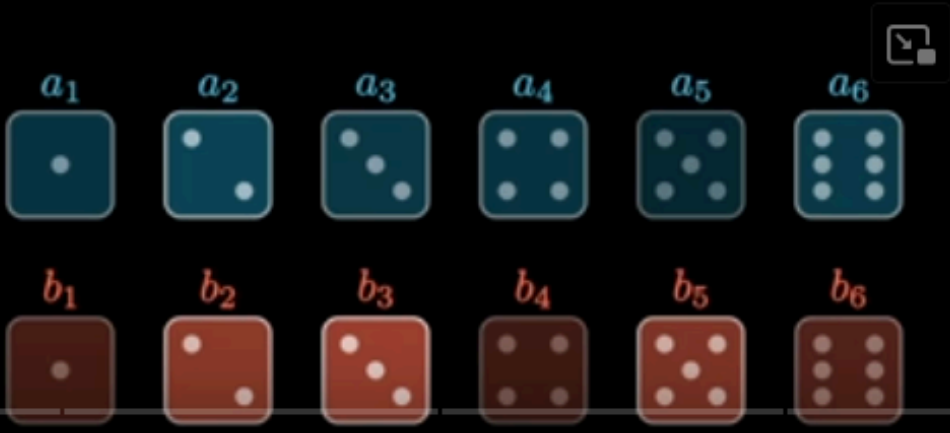


Króliki się rozmnażają i mutują

Splot

3 blue 1 brown convolution

Convolution of (a_i) and (b_i)

$$\begin{aligned}P(\text{blue} + \text{brown} = 2) &= a_1 \cdot b_1 \\P(\text{blue} + \text{brown} = 3) &= a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 \\P(\text{blue} + \text{brown} = 4) &= a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_1 \\P(\text{blue} + \text{brown} = 5) &= a_1 \cdot b_4 + a_2 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_2 + a_4 \cdot b_1 \\P(\text{blue} + \text{brown} = 6) &= a_1 \cdot b_5 + a_2 \cdot b_4 + a_3 \cdot b_3 + a_4 \cdot b_2 + a_5 \cdot b_1 \\P(\text{blue} + \text{brown} = 7) &= a_1 \cdot b_6 + a_2 \cdot b_5 + a_3 \cdot b_4 + a_4 \cdot b_3 + a_5 \cdot b_2 + a_6 \cdot b_1 \\P(\text{blue} + \text{brown} = 8) &= a_2 \cdot b_6 + a_3 \cdot b_5 + a_4 \cdot b_4 + a_5 \cdot b_3 + a_6 \cdot b_2 \\P(\text{blue} + \text{brown} = 9) &= a_3 \cdot b_6 + a_4 \cdot b_5 + a_5 \cdot b_4 + a_6 \cdot b_3 \\P(\text{blue} + \text{brown} = 10) &= a_4 \cdot b_6 + a_5 \cdot b_5 + a_6 \cdot b_4 \\P(\text{blue} + \text{brown} = 11) &= a_5 \cdot b_6 + a_6 \cdot b_5 \\P(\text{blue} + \text{brown} = 12) &= a_6 \cdot b_6\end{aligned}$$


5:26 / 23:00 • Add two random variables >

But what is a convolution?



3Blue1Brown
7,63 mln subskrybentów

Subskrybujesz

111 tys.



Udostępnij

Podziękuj



Splot

Splot w dziedzinie czasu
to mnożenie w dziedzinie
częstotliwości.

Splot

Splot w dziedzinie czasu
to mnożenie w dziedzinie
częstotliwości.

Wolfram MathWorld

FROM THE MAKERS OF MATHEMATICA
AND WOLFRAM|ALPHA

Search

Q

Calculus and Analysis › Integral Transforms › Convolution ›

Convolution Theorem

Let $f(t)$ and $g(t)$ be arbitrary functions of time t with Fourier transforms. Take

$$f(t) = \mathcal{F}_\nu^{-1}[F(\nu)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu \quad (1)$$

$$g(t) = \mathcal{F}_\nu^{-1}[G(\nu)](t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu, \quad (2)$$

where $\mathcal{F}_\nu^{-1}(t)$ denotes the inverse Fourier transform (where the transform pair is defined to have constants $A = 1$ and $B = -2\pi$). Then the convolution is

$$f * g \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(t') f(t - t') dt' \quad (3)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t') \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu (t - t')} d\nu \right] dt'. \quad (4)$$

Interchange the order of integration,

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t') e^{-2\pi i \nu t'} dt' \right] e^{2\pi i \nu t} d\nu \quad (5)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) G(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu \quad (6)$$

$$= \mathcal{F}_\nu^{-1}[F(\nu) G(\nu)](t). \quad (7)$$

So, applying a Fourier transform to each side, we have

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]. \quad (8)$$

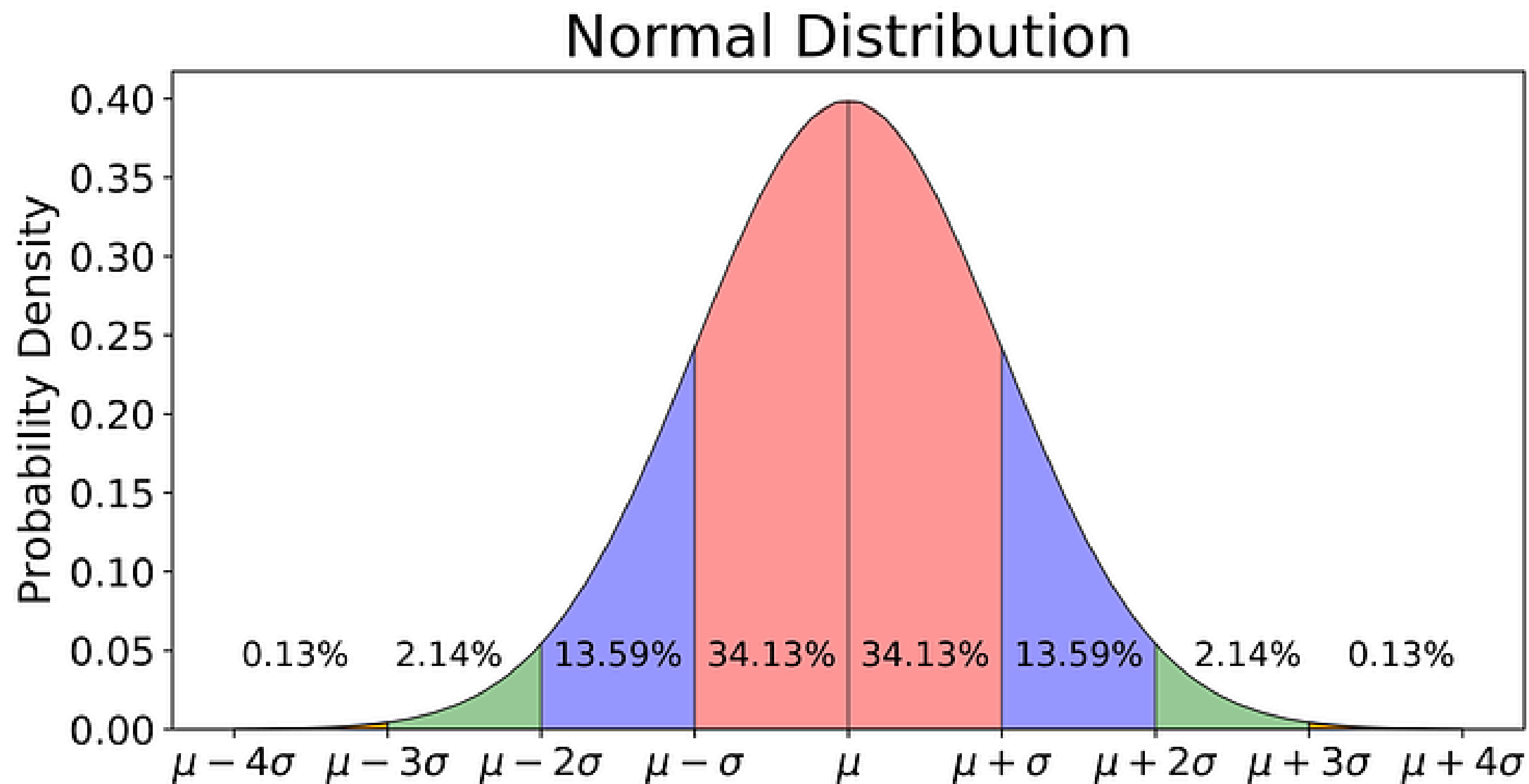
The convolution theorem also takes the alternate forms

$$\mathcal{F}[f g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g] \quad (9)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]) = f * g \quad (10)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]) = f g. \quad (11)$$

Rozkład normalny

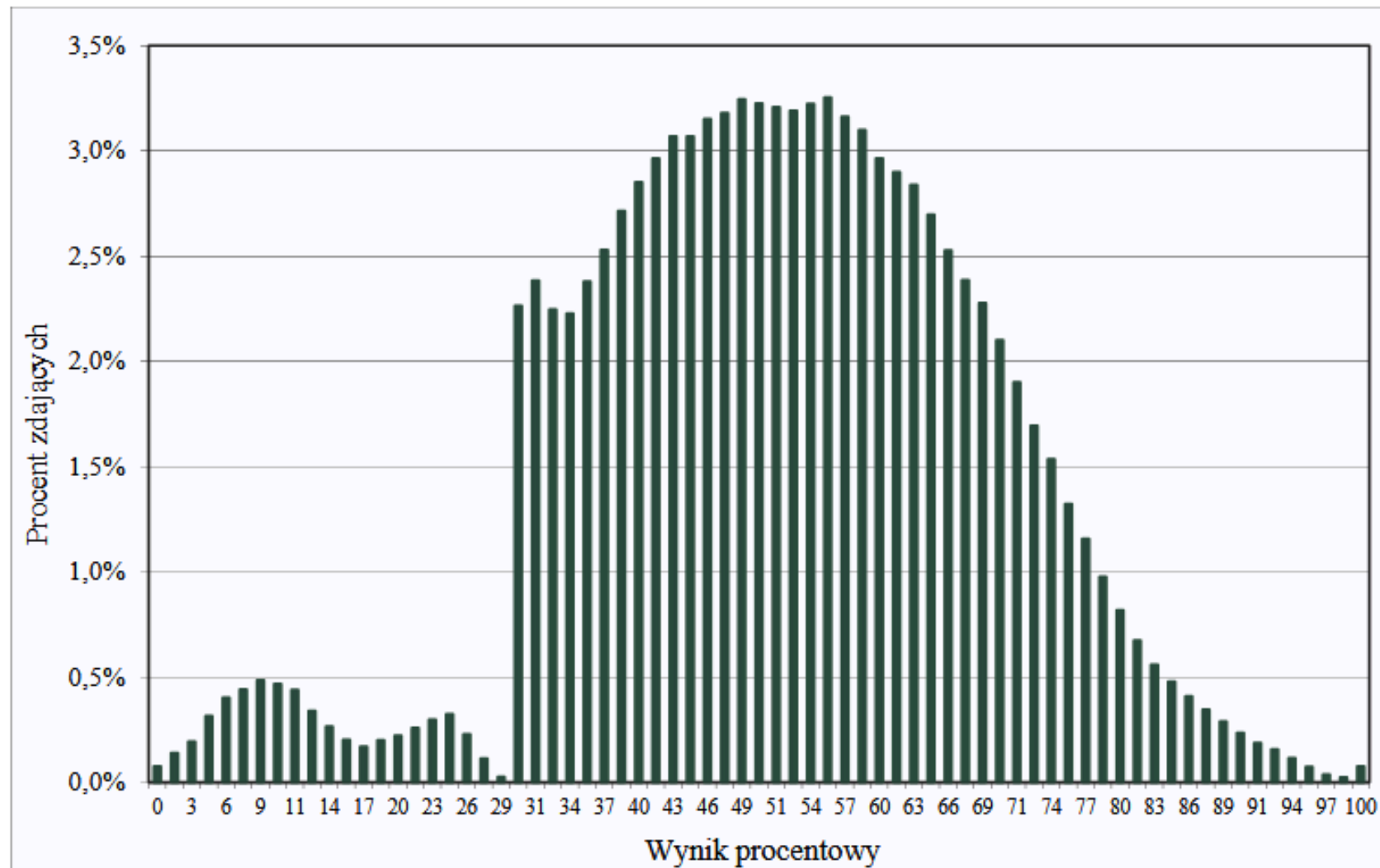


Rozkład maturalny

Język polski 5

4. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających



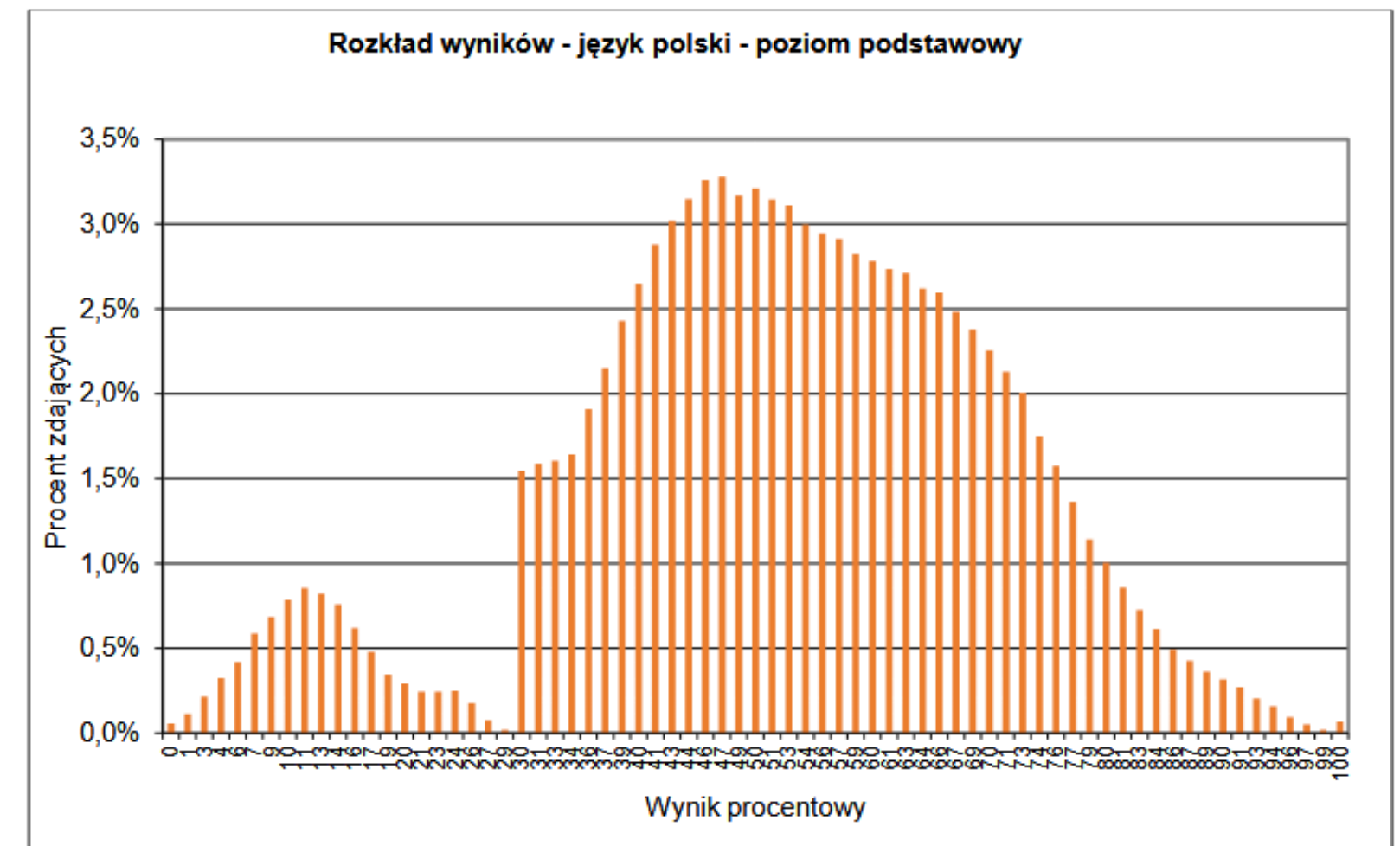
Wykres 1. Rozkład wyników zdających

Sprawozdanie za rok 2020

Poziom podstawowy. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 1. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH



Ewolucja w modelu Malthusa-Verhulsta

Stare pokolenie wymiera,
śmiertelność zależy od prędkości v

Poprawka logistyczna Verhulsta,
 K = pojemność środowiska

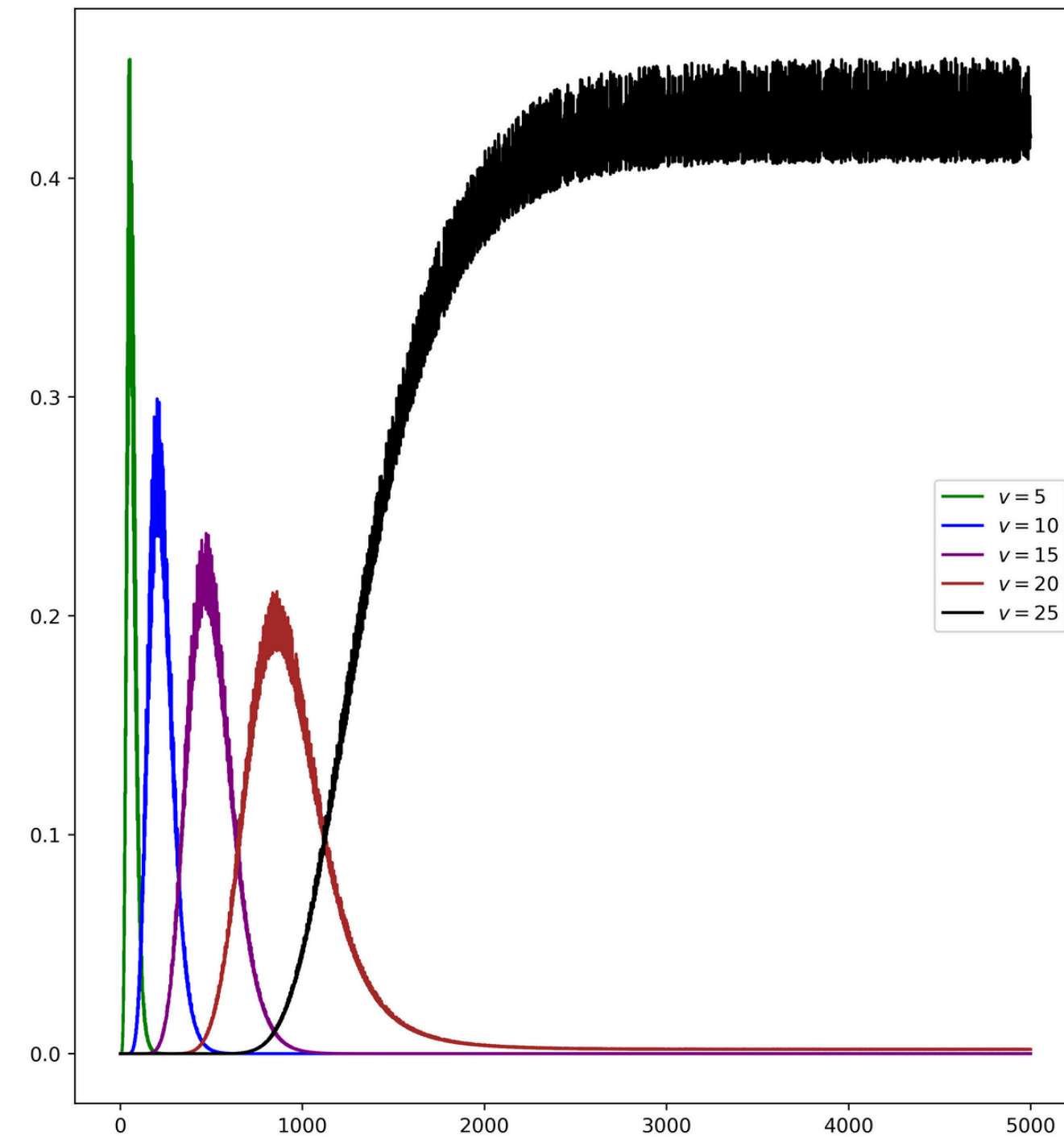
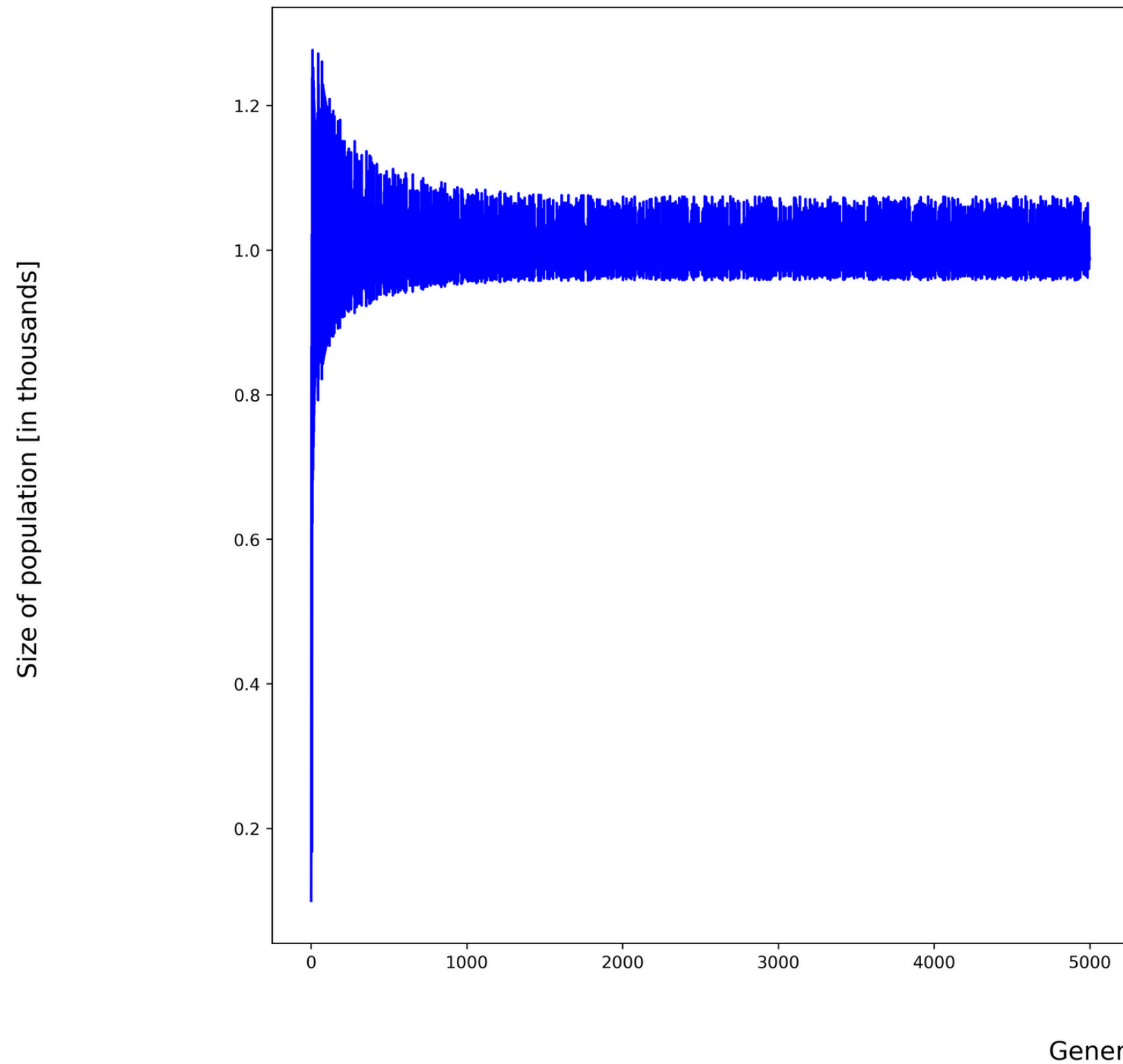
$$P_{n+1}(v) = (1 - f_{mort}(v))P_n(v) + bP_n \star f_{mut}(v) \left(1 - \frac{\|P_n\|_1}{K}\right) \mathbb{1}_{[0,K]}(\|P_n\|_1)$$

Liczba królików w kolejnym
pokoleniu o prędkości v

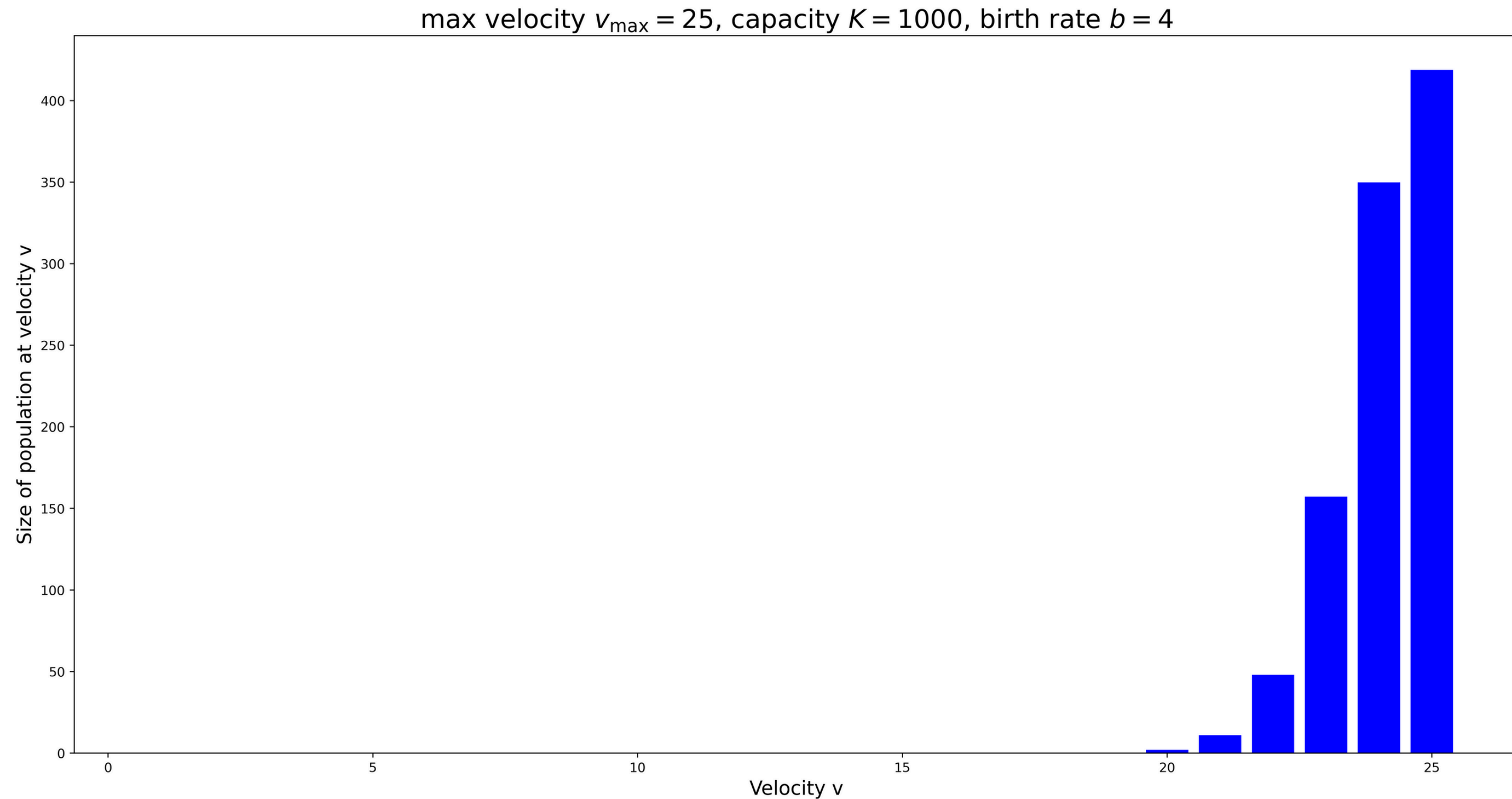
Króliki się rozmnażają i mutują

Ewolucja w modelu Malthusa-Verhulsta

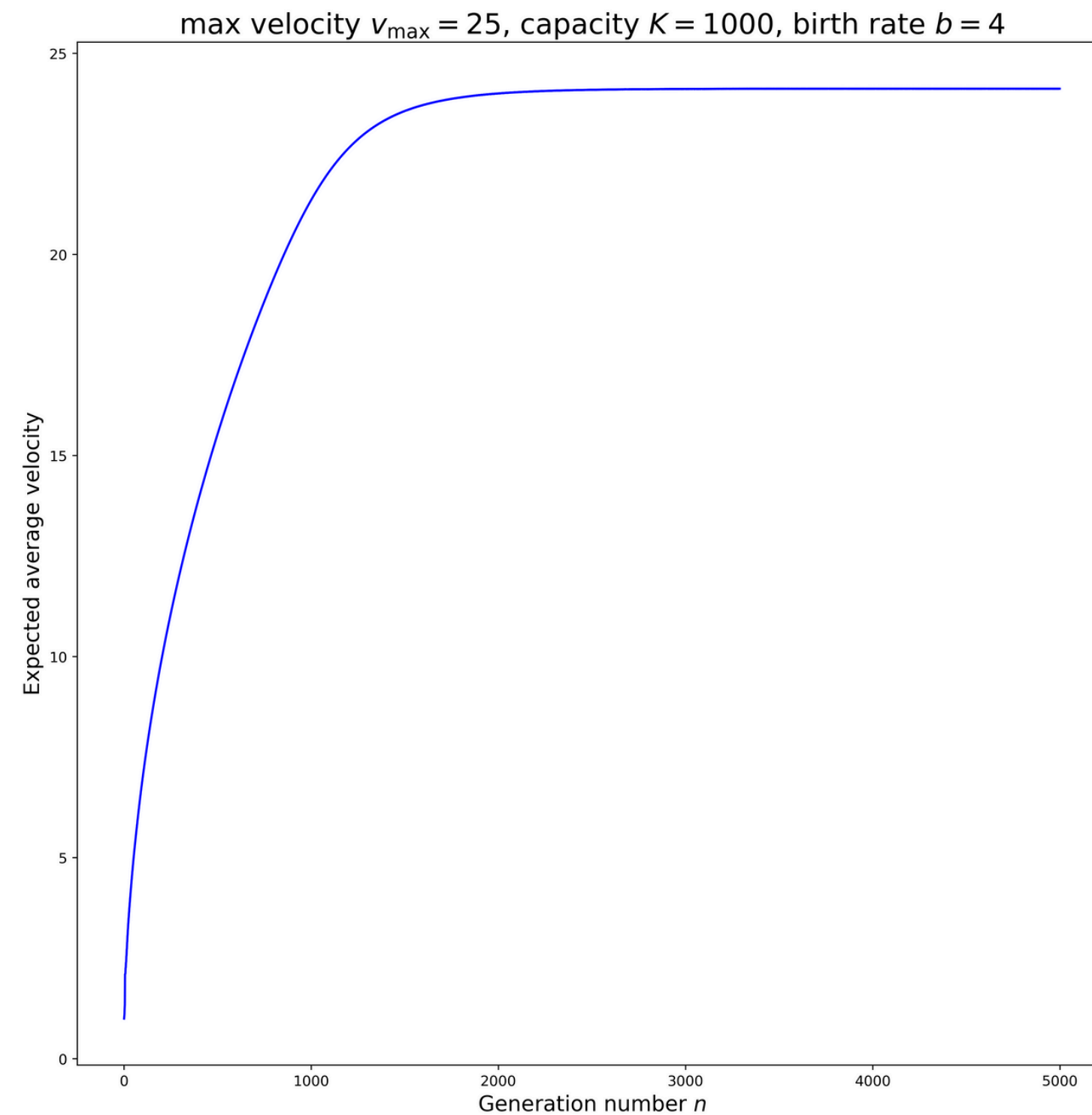
max velocity $v_{\max} = 25$, capacity $K = 1000$, birth rate $b = 4$



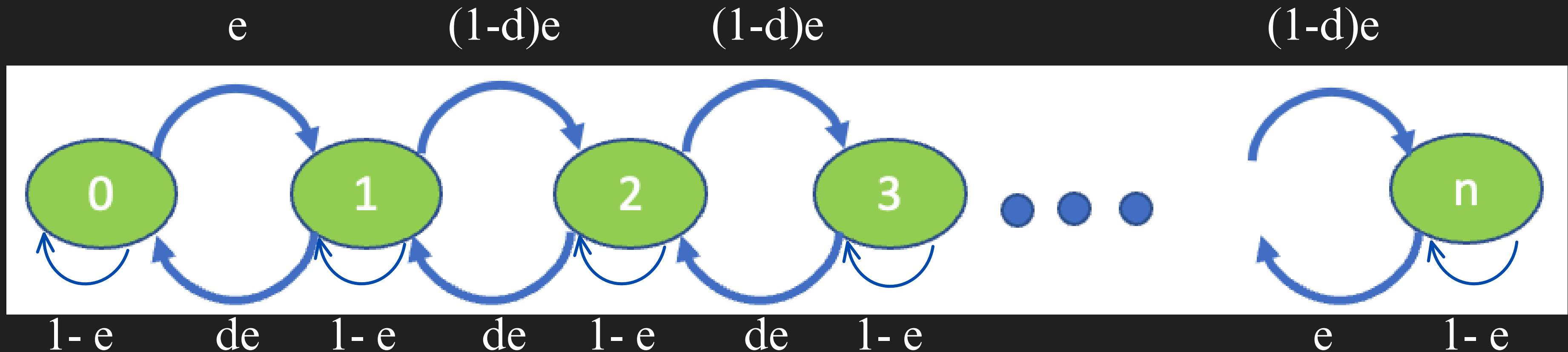
Ewolucja w modelu Malthusa-Verhulsta



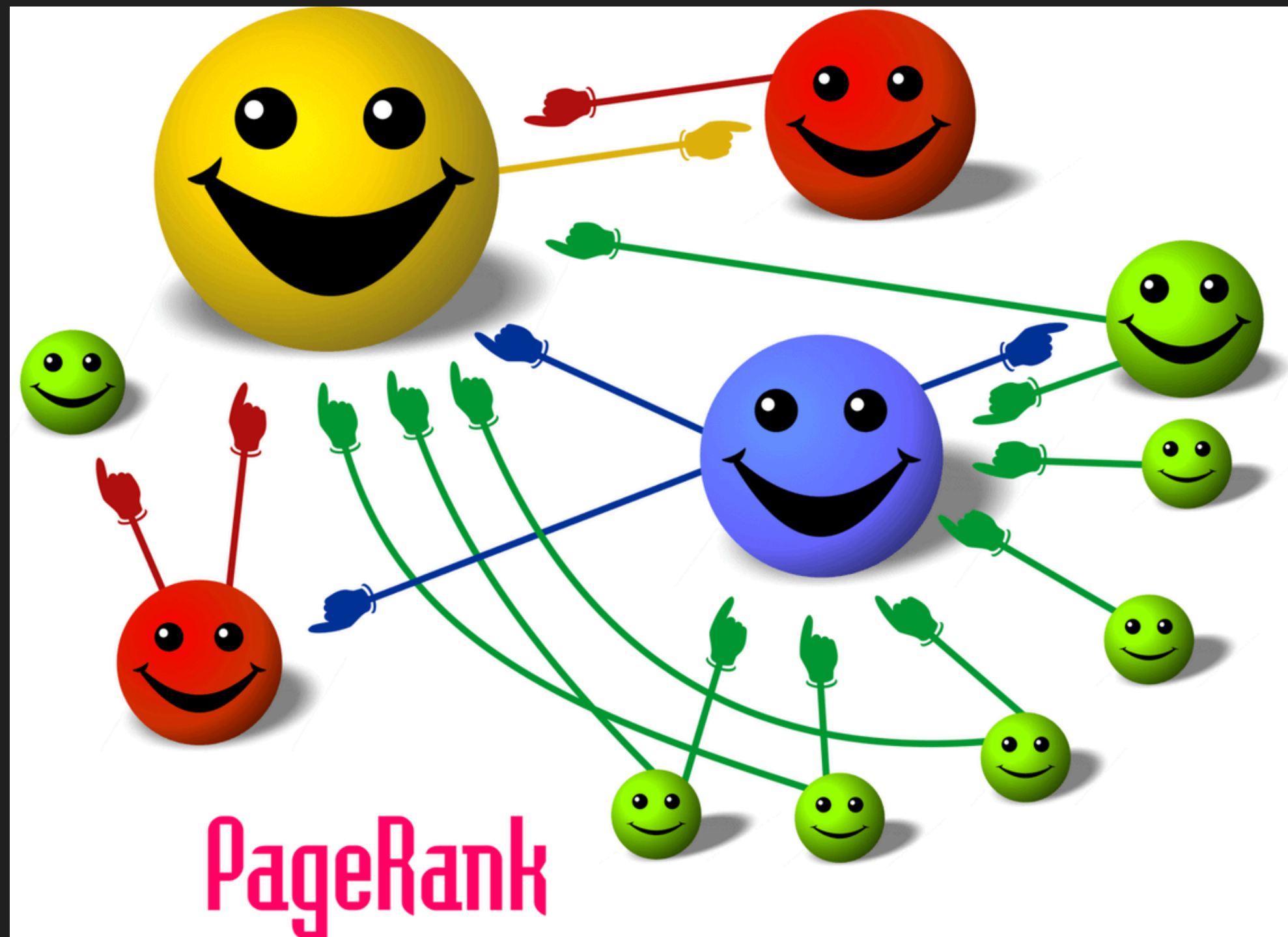
Ewolucja w modelu Malthusa-Verhulsta



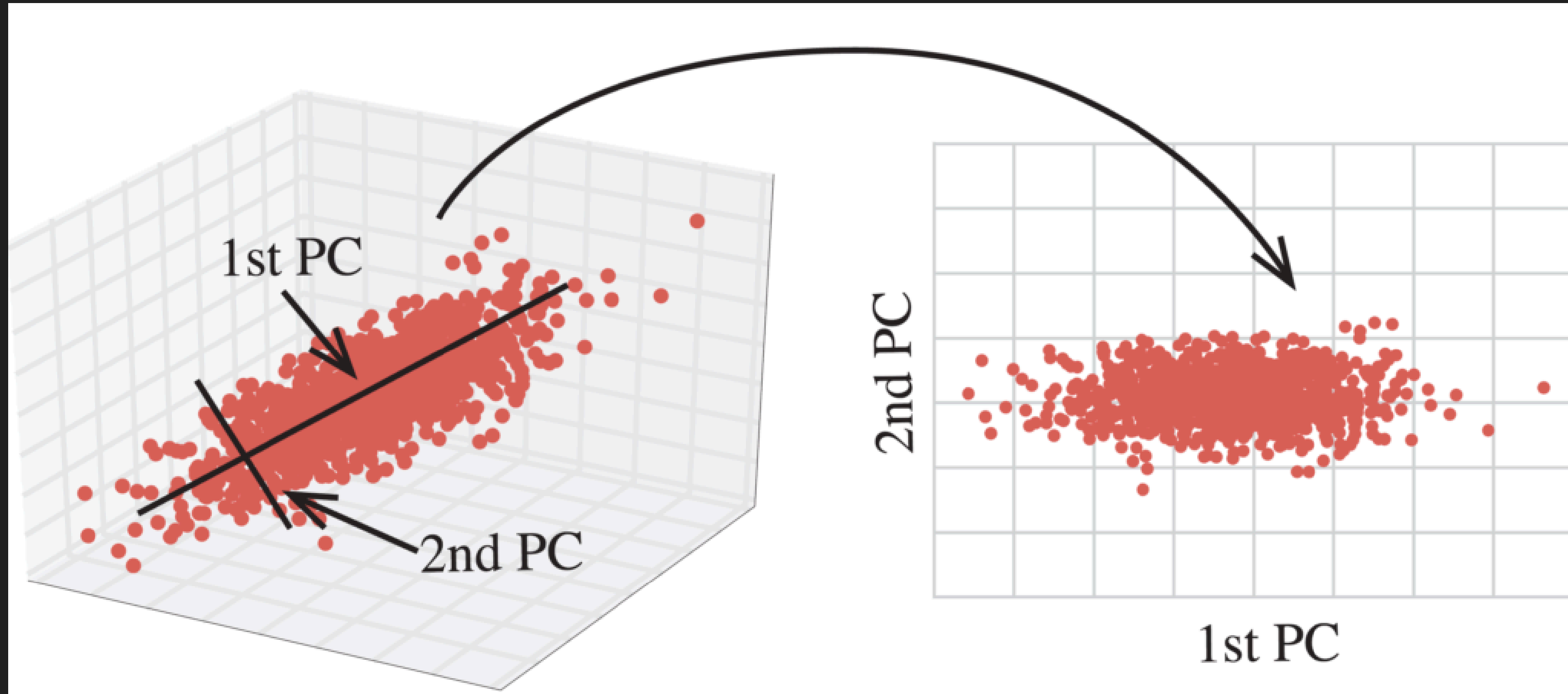
Ewolucja w łańcuchach Markowa



Ewolucja w łańcuchach Markova, algorytm PageRank



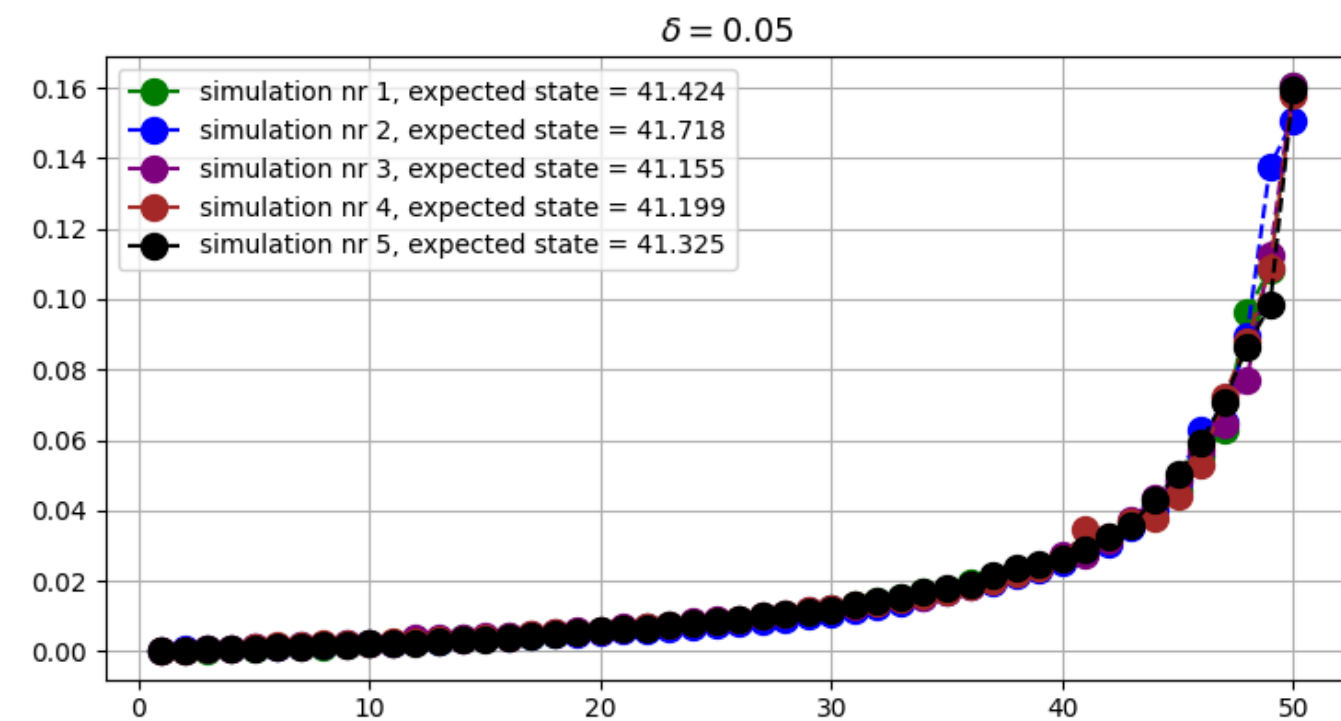
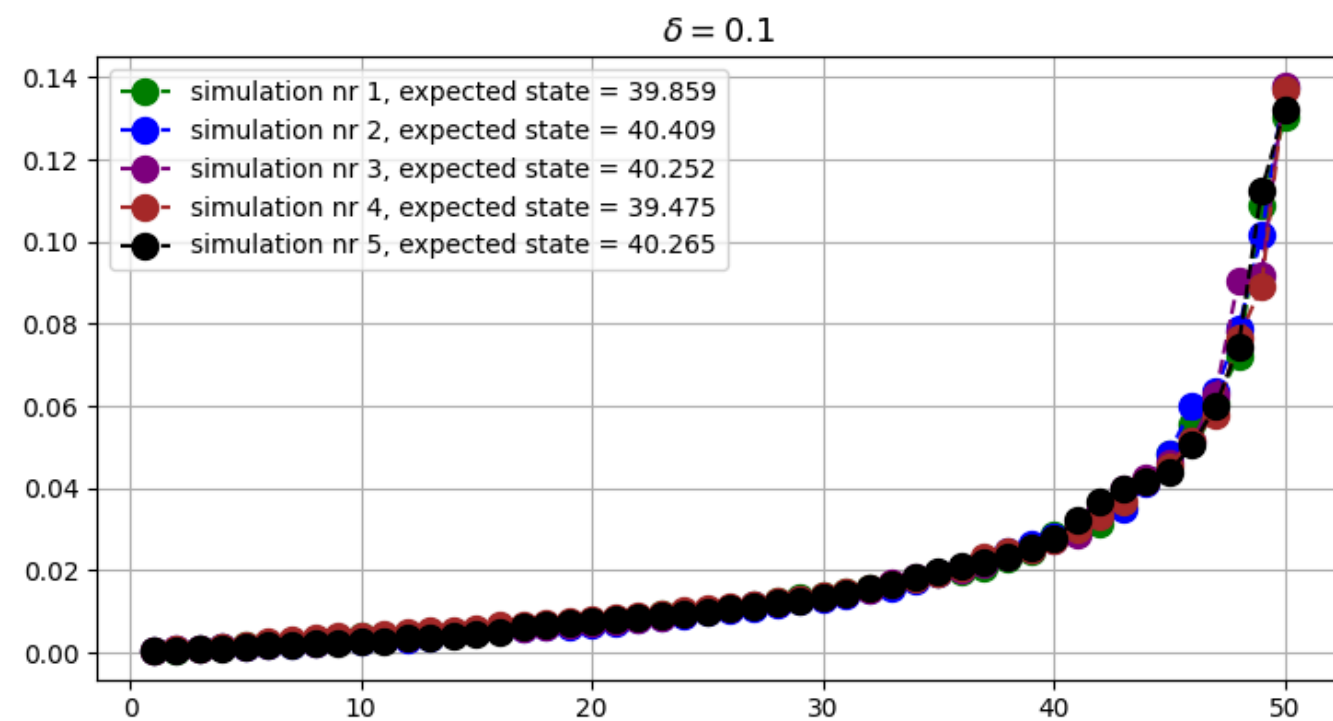
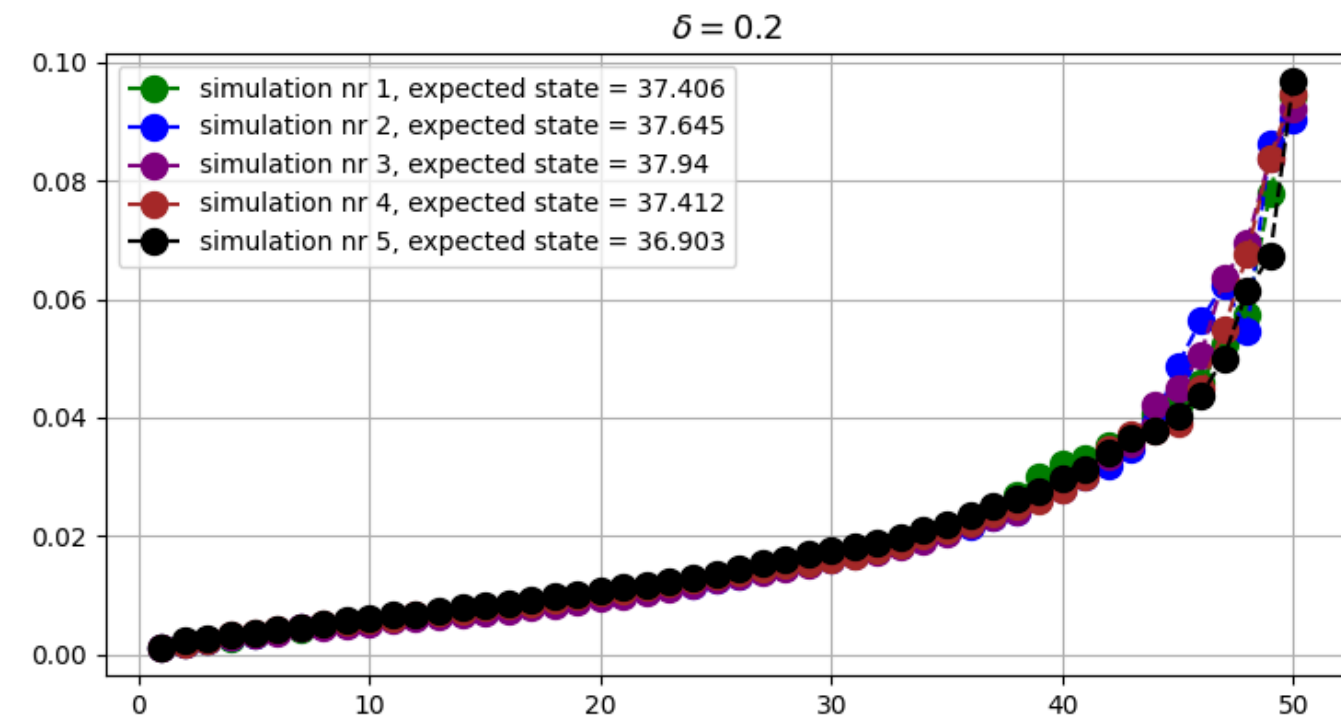
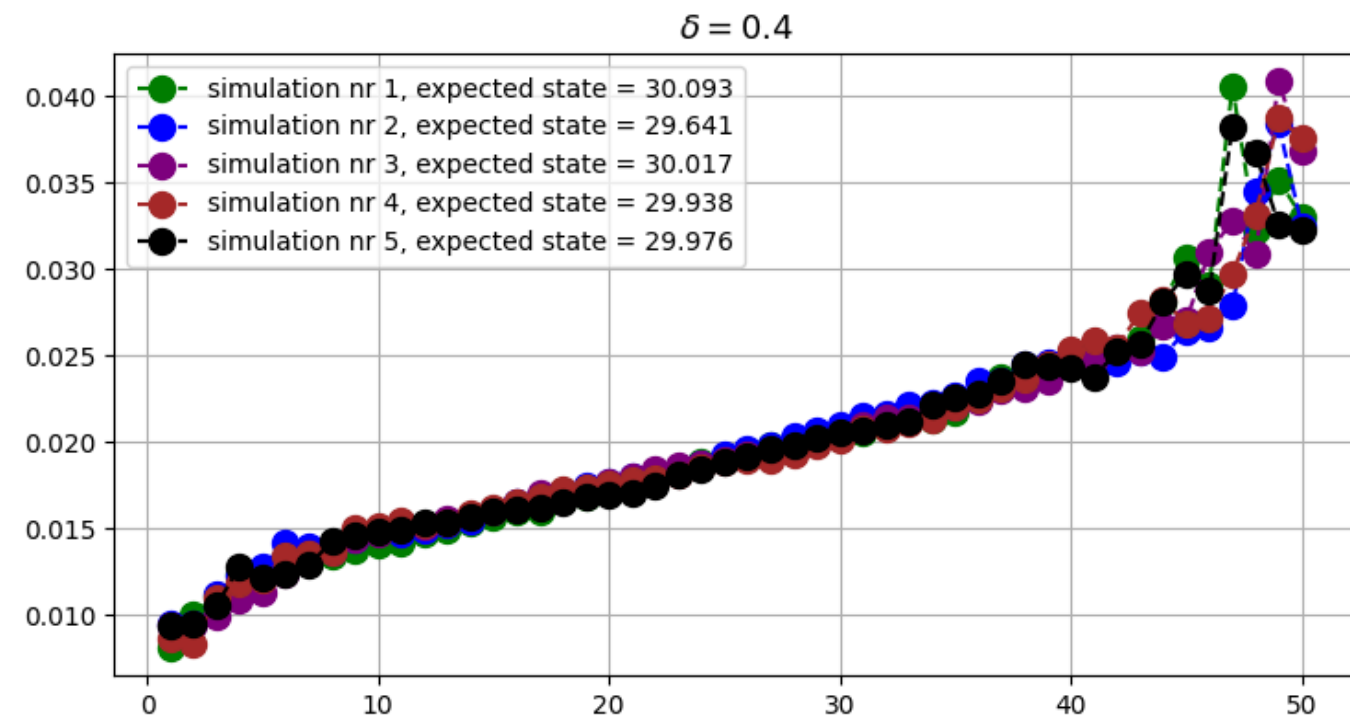
Problem wartości własnych, PCA, przekleństwo wymiarowości



Ewolucja w łańcuchach Markowa

Stationary distributions π^* for $n = 50$ and $\varepsilon = 0.05$

Probabilities π_i^*



Indices i

Autoreklama...

Darwinian evolution in Malthusian population growth model and Markov chains

Mateusz Krukowski

Institute of Mathematics, Łódź University of Technology,
Wółczańska 215, 90-924 Łódź, Poland

e-mail: mateusz.krukowski@p.lodz.pl

April 22, 2025

Abstract

The paper is devoted to the study of Darwinian evolution in two mathematical models. The first one is a variation on the Malthusian population growth model with Verhulst's environmental capacity. The second model is grounded in the theory of Markov chains and their stationary distributions. We prove preliminary results regarding both models and pose conjectures, which are supported by computer simulations.

Keywords : Darwinian evolution, Malthusian population growth model, Markov chains, eigenvalues and eigenvectors

AMS Mathematics Subject Classification (2020): 92D15, 92D25

1 Introduction

The observation that crossbreeding of animals and plants could favour certain desirable traits had been known to breeders and farmers for millenia. Arguably the most familiar example is the grey wolf (*Canis lupus*), whose domestication resulted in over two hundred breeds of dog (*Canis lupus familiaris*). Another case in point is the wild cabbage (*Brassica oleracea*), which the horticulturalists have “chiseled into” vegetables such as broccoli, Brussels sprouts, cauliflower, kale, kohlrabi, romanescu etc. It is quite remarkable that these instances did not develop into a comprehensive theory until the dawn of XIX century.

Over hundred and fifty years prior to Darwin setting foot on board HMS Beagle, the scientific revolution began to transform people's perspective on the world around us. Giant leaps in understanding the laws of nature were not restricted to physics or chemistry, but pertained to biology in equal measure. Arguably, every comprehensive list of the brightest stars of the era should include:

arXiv:2504.14036v1 [math.PR] 18 Apr 2025