



Koala (*Phascolarctos cinereus*) jest zwierzęciem leniwym, śpiącym nawet do 20 godzin na dobę. Jest też bardzo wybredna. Załóżmy, że pewna koala ma 3 ulubione drzewa eukaliptusa (jak na rysunku).



Drzewa eukaliptusa w australijskim lesie (wymagana odrobina wyobraźni).

Dla $i, j \in \{1, 2, 3\}$, niech p_{ij} oznacza prawdopodobieństwo, że koala będzie jadła na drzewie i następnego dnia, pod warunkiem że jadła na drzewie j danego dnia.

Wiadomo, że:

- Z prawdopodobieństwem $q \in (0,1)$, koala pozostanie na tym samym drzewie następnego dnia.
- Ponieważ jest leniwa, koala przemieszcza się tylko na drzewa sąsiadujące: jeśli jadła na drzewie 2 pewnego dnia, to następnego dnia przeniesie się albo na drzewo 1, albo na drzewo 3 z równym prawdopodobieństwem, lub pozostanie na miejscu. Jeśli jadła na drzewie 1 lub 3, to przeniesie się tylko na drzewo 2 lub pozostanie na miejscu.

Oto zadanie:

- Dla opisanych powyżej prawdopodobieństw p_{ij} , wypisz macierz $P = [p_{ij}]_{1 \leq i,j \leq 3}$, zwaną **macierzą przejścia** modelu, w zależności od q . Wyjaśnij, co reprezentuje (i,j) -ty element potęgi macierzy P^k .
- Pokaż, że promień spektralny $r(P) = 1$ oraz że 1 **jest wartością własną ściśle dominującą**, tzn. każda wartość własna jest mniejsza niż 1.
- Na dłuższą metę, co można powiedzieć o proporcji dni, które koala spędza na każdym z drzew?