

Prognozowanie pogody; procesy Markowa

Wojciech Kryszewski



Politechnika
Łódzka

Spotkania z Matematyką Stosowaną – 18.11.2025

Pogoda? Czy wpływa na nasze życie i plany?



Pogoda w kolejnych dniach lata

Stany pogody:

- S_1 : Słonecznie
- S_2 : Deszczowo
- S_3 : Wietrznie
- S_4 : Pochmurnie

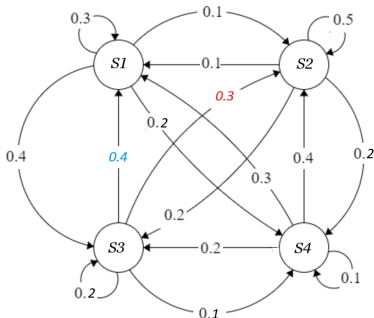


Diagram prawdopodobieństwa przejść między stanami pogody

Macierz przejść

Stan pogody w n -tym dniu oznaczamy X_n .

Zatem X_n może przyjmować cztery wartości S_1, S_2, S_3, S_4 .

Własność Markowa: Pamięć tylko o stanie obecnym!

Stan X_{n+1} w $(n+1)$ -szym dniu zależy **tylko od stanu X_n** w n -tym dniu, nie zależy od historii. Oznaczmy $p_{ij} = P(X_{n+1} = S_i | X_n = S_j)$. Jest to prawdopodobieństwo przejścia ze stanu S_j do stanu S_i .

Tworzymy macierz: w wierszu o numerze i i kolumnie o numerze j wstawiamy p_{ij} .

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Prawdopodobieństwo przejścia **ze stanu S_3 do stanu S_2** wynosi $p_{23} = 0.3$

Prawdopodobieństwo przejścia **ze stanu S_3 do stanu S_1** wynosi $p_{13} = 0.4$

Macierz przejść

Stan pogody w n -tym dniu oznaczamy X_n .

Zatem X_n może przyjmować cztery wartości S_1, S_2, S_3, S_4 .

Własność Markowa: Pamięć tylko o stanie obecnym!

Stan X_{n+1} w $(n+1)$ -szym dniu zależy **tylko od stanu X_n** w n -tym dniu, nie zależy od historii. Oznaczmy $p_{ij} = P(X_{n+1} = S_i | X_n = S_j)$. Jest to prawdopodobieństwo przejścia ze stanu S_j do stanu S_i .

Tworzymy macierz: w wierszu o numerze i i kolumnie o numerze j wstawiamy p_{ij} .

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Prawdopodobieństwo przejścia **ze stanu S_3 do stanu S_2** wynosi $p_{23} = 0.3$

Prawdopodobieństwo przejścia **ze stanu S_3 do stanu S_1** wynosi $p_{13} = 0.4$

Przykładowa prognoza na następny dzień

Przykład: W tym dniu jest słonecznie (S_1)

Pogoda na następny dzień:

- 30% szans na słonecznie (0.3)
- 10% szans na deszcz (0.1)
- 40% szans na wiatr (0.4)
- 20% szans na pochmurnie (0.2)

Symulacja procesu

Przykładowa trajektoria pogody przez 7 dni

Analogicznie można przewidzieć przebieg pogody w ciągu kilku kolejnych dni.

Dzień	Stan	Pogoda	P-stwo przejścia
1	$X_1 = S_1$	Słonecznie	–
2	$X_2 = S_1$	Słonecznie	0.3
3	$X_3 = S_2$	Deszczowo	0.1
4	$X_4 = S_2$	Deszczowo	0.5
5	$X_5 = S_3$	Wietrznie	0.2
6	$X_6 = S_4$	Pochmurnie	0.1
7	$X_7 = S_1$	Słonecznie	0.3

Wektor rozkładu warunków pogodowych

Wektor pogody

Wektorem pogody, a raczej wektorem rozkładu warunków pogodowych, nazywa się wektor $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ (zapisany tu jako wiersz, ale wektory zapisujemy **zawsze** jako kolumny liczb), w którym

x_i = prawdopodobieństwo, że pogoda jest w stanie S_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Warto zauważyć, że ten wektor jest stochastyczny, tzn.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Przykład: Jeśli w dziś jest deszczowo, to wektorem pogody jest wektor $[0, 1, 0, 0]$, bo z prawdopodobieństwem 1 mamy stan S_2 = deszczowo.

Jaki wektor pogody będzie jutro? To jasne – można to wyczytać z macierzy przejścia, patrząc na liczby p_{21}, p_{22}, p_{23} i p_{24} , czyli drugi wiersz macierzy przejścia.

Jutrzejszy wektor $[p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}] = [0.1, 0.5, 0.2, 0.2]$.

Wektor rozkładu warunków pogodowych

Wektor pogody

Wektorem pogody, a raczej wektorem rozkładu warunków pogodowych, nazywa się wektor $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ (zapisany tu jako wiersz, ale wektory zapisujemy **zawsze** jako kolumny liczb), w którym

x_i = prawdopodobieństwo, że pogoda jest w stanie S_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Warto zauważyć, że ten wektor jest stochastyczny, tzn.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Przykład: Jeśli w dziś jest deszczowo, to wektorem pogody jest wektor $[0, 1, 0, 0]$, bo z prawdopodobieństwem 1 mamy stan S_2 = deszczowo.

Jaki wektor pogody będzie jutro? To jasne – można to wyczytać z macierzy przejścia, patrząc na liczby p_{21}, p_{22}, p_{23} i p_{24} , czyli drugi wiersz macierzy przejścia.

Jutrzejszy wektor $[p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{24}] = [0.1, 0.5, 0.2, 0.2]$.

- **A jaki będzie wektor pogody pojutrze?** za 5 dni? za 2 tygodnie?
- **Ogólnie jaki będzie wektor pogody** w dniu następującym po dniu, w którym wynosił on $[x_1, x_2, x_3, x_4]$?
- A jak będzie wyglądała przeciętna pogoda przyszłego lata?
- Czy to można przewidzieć znając macierz przejść?

Na te i podobne pytania odpowiada (między innymi) **algebra liniowa** – oczywiście jeśli się ją odpowiednio zastosuje.

Matematyka użyteczna jest piękna, a piękna matematyka jest użyteczna...

- **A jaki będzie wektor pogody pojutrze?** za 5 dni? za 2 tygodnie?
- Ogólnie **jaki będzie wektor pogody** w dniu następującym po dniu, w którym wynosił on $[x_1, x_2, x_3, x_4]$?
- **A jak będzie wyglądała przeciętna pogoda przyszłego lata?**
- Czy to można przewidzieć znając macierz przejść?

Na te i podobne pytania odpowiada (między innymi) **algebra liniowa** – oczywiście jeśli się ją odpowiednio zastosuje.

Matematyka użyteczna jest piękna, a piękna matematyka jest użyteczna...

- **A jaki będzie wektor pogody pojutrze?** za 5 dni? za 2 tygodnie?
- Ogólnie **jaki będzie wektor pogody** w dniu następującym po dniu, w którym wynosił on $[x_1, x_2, x_3, x_4]$?
- **A jak będzie wyglądała przeciętna pogoda przyszłego lata?**
- Czy to można przewidzieć znając macierz przejść?

Na te i podobne pytania odpowiada (między innymi) **algebra liniowa** – oczywiście jeśli się ją odpowiednio zastosuje.

Matematyka użyteczna jest piękna, a piękna matematyka jest użyteczna...

- **A jaki będzie wektor pogody pojutrze?** za 5 dni? za 2 tygodnie?
- Ogólnie **jaki będzie wektor pogody** w dniu następującym po dniu, w którym wynosił on $[x_1, x_2, x_3, x_4]$?
- **A jak będzie wyglądała przeciętna pogoda przyszłego lata?**
- Czy to można przewidzieć znając macierz przejść?

Na te i podobne pytania odpowiada (między innymi) **algebra liniowa** – oczywiście jeśli się ją odpowiednio zastosuje.

Matematyka użyteczna jest piękna, a piękna matematyka jest użyteczna...

Macierze

Macierz stanowi wygodny sposób zapisu różnych danych.

Trzech uczniów s_1, s_2, s_3 uczestniczy w czterech klasówkach 1,2,3,4. Następująca macierz o trzech wierszach i 4 kolumnach opisuje otrzymane stopnie:

	1	2	3	4
s_1	2	2	2	4
s_2	4	4	3	5
s_3	3	5	5	2

A więc s_2 student otrzymał 4 z trzeciego sprawdzianu.

Podobną macierz można sporządzić, gdy studentów jest n , zaś sprawdzianów m .
Będzie miała n wierszy i m kolumn.

Ogólnie mówiąc **macierzą** ($n \times m$) (macierzą o n wierszach i m kolumnach), gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, nazwiemy wyrażenie

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}};$$

wyraz $a_{ij} \in \mathbb{R}$ stoi w i -tym wierszu i j -tej kolumnie, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

- Macierz jest **kwadratowa**, gdy $n = m$;
- jest **dodatnia** lub **nieujemna** $a_{ij} > 0$ lub $a_{ij} \geq 0$ dla wszystkich i, j .
- Wśród macierzy kwadratowych ważną rolę pełni tzw. **macierz jednostkowa**

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Szczególnym przypadkiem są **n -wymiarowe wektory**, tzn. macierze o n -wierszach i jednej kolumnie, a więc wymiaru $(n \times 1)$:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Czasem piszemy $x = [x_1, \dots, x_n]$ pamiętając, że wektory mają **zawsze** postać kolumnową.

- Piszemy też $[x_1, \dots, x_n]^T$ zamiast zapisu kolumnowego (symbol T oznacza taką właśnie postać).
- Wektor jest **dodatni** lub **nieujemny**: $x_i > 0$ ($x_i \geq 0$) dla wszystkich i .

Działania na macierzach

Macierze **tych samych wymiarów** można **dodawać** lub **odejmować**: jeśli

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}, \quad B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}},$$

to **sumą** lub różnicą jest macierz $(m \times n)$

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Macierze można **mnożyć przez liczby**: jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$, to $I \in \mathbb{R}$

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Na przykład (przy $n = m$)

$$\lambda I_n = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Działania na macierzach

Macierze **tych samych wymiarów** można **dodawać** lub **odejmować**: jeśli

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}, \quad B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}},$$

to **sumą** lub różnicą jest macierz $(m \times n)$

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Macierze można **mnożyć przez liczby**: jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$, to $I \in \mathbb{R}$

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Na przykład (przy $n = m$)

$$\lambda I_n = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Działania na macierzach

Macierze **tych samych wymiarów** można **dodawać** lub **odejmować**: jeśli

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}, \quad B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}},$$

to **sumą** lub różnicą jest macierz $(m \times n)$

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Macierze można **mnożyć przez liczby**: jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$, to $I \in \mathbb{R}$

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

Na przykład (przy $n = m$)

$$\lambda I_n = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

W szczególności, jeśli $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ są wektorem, to

$$\lambda x = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$$

oraz

$$x \pm y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{bmatrix}$$

Macierze A, B wymiarów $(n \times m)$ oraz $(m \times k)$ można też mnożyć przez siebie; w wyniku powstanie tzw. **iloczyn Cauchy'ego**, tj. macierz $A \cdot B$ wymiaru $(n \times k)$.

- W szczególności, dla macierzy kwadratowej (wymiaru $(n \times n)$) można mówić o **potęgowaniu macierzy**: dla $k \geq 0$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_k; \quad A^0 = I_n.$$

Będzie to również macierz $(n \times n)$.

- W szczególności niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Macierze A, B wymiarów $(n \times m)$ oraz $(m \times k)$ można też mnożyć przez siebie; w wyniku powstanie tzw. **iloczyn Cauchy'ego**, tj. macierz $A \cdot B$ wymiaru $(n \times k)$.

- W szczególności, dla macierzy kwadratowej (wymiaru $(n \times n)$) można mówić o **potęgowaniu macierzy**: dla $k \geq 0$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_k; \quad A^0 = I_n.$$

Będzie to również macierz $(n \times n)$.

- W szczególności niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Wynikiem mnożenia macierzy A przez x (w tej kolejności - to ma znaczenie) jest wektor

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = A \cdot x,$$

gdzie

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m, \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m, \end{cases}$$

tzn.

$$y_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Wynikiem mnożenia macierzy A przez x (w tej kolejności - to ma znaczenie) jest wektor

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = A \cdot x,$$

gdzie

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m, \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m, \end{cases}$$

tzn.

$$y_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Jak wyznaczać wektor pogodowy dnia następnego?

Przypuśćmy, że danego dnia wektor pogodowy $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ (tzn. że stan S_i wystąpi z prawdopodobieństwem x_i). Np. niech $[0.5, 0, 0, 0.5]$, tzn.

$$x_1 = 0.5, x_2 = 0 = x_3, x_4 = 0.5.$$

Następnego dnia wektor pogodowy będzie

$$y = P \cdot x = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

czyli

$$y_1 = 0.3x_1 + 0.1x_2 + 0.4x_3 + 0.3x_4 = 0.3$$

$$y_2 = 0.1x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 + 0.4x_4 = 0.25$$

$$y_3 = 0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.2x_4 = 0.3$$

$$y_4 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.1x_4 = 0.15$$

A więc szanse, że następnego będzie padał deszcz wynoszą 25%.

Co dalej?

Jeśli danego dnia rozkład prawdopodobieństwa pogody jest $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$, to za **dwa** dni ten wektor to

$$P \cdot y = P \cdot (P \cdot x) = P^2 \cdot x,$$

gdzie P^2 to kwadrat macierzy P .

A za k dni? ($k = 3, 4, \dots$).

Pogodę za k dni opisuje wektor

$$P^k \cdot x.$$

Współczynniki macierzy $P = [p_{ij}^{(k)}]_{i=1,\dots,4, j=1,\dots,4}$ tworzą prawdopodobieństwa przejścia ze stanu S_j do stanu S_i w ciągu k -dni.

Uwaga $p_{ij}^{(k)} \neq p_{ij}^k$ - to nie jest potęga.

Czy można przewidzieć jaka będzie pogoda w długim okresie czasu? Bez względu na to, jaką pogodę zaobserwujemy jutro, lub pojutrze (albo za tydzień)?

Co dalej?

Jeśli danego dnia rozkład prawdopodobieństwa pogody jest $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$, to za **dwa** dni ten wektor to

$$P \cdot y = P \cdot (P \cdot x) = P^2 \cdot x,$$

gdzie P^2 to kwadrat macierzy P .

A za k dni? ($k = 3, 4, \dots$).

Pogodę za k dni opisuje wektor

$$P^k \cdot x.$$

Współczynniki macierzy $P = [p_{ij}^{(k)}]_{i=1,\dots,4, j=1,\dots,4}$ tworzą prawdopodobieństwa przejścia ze stanu S_j do stanu S_i w ciągu k -dni.

Uwaga $p_{ij}^{(k)} \neq p_{ij}^k$ - to nie jest potęga.

Czy można przewidzieć jaka będzie pogoda w długim okresie czasu? Bez względu na to, jaką pogodę zaobserwujemy jutro, lub pojutrze (albo za tydzień)?

Co dalej?

Jeśli danego dnia rozkład prawdopodobieństwa pogody jest $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]$, to za **dwa** dni ten wektor to

$$P \cdot y = P \cdot (P \cdot x) = P^2 \cdot x,$$

gdzie P^2 to kwadrat macierzy P .

A za k dni? ($k = 3, 4, \dots$).

Pogodę za k dni opisuje wektor

$$P^k \cdot x.$$

Współczynniki macierzy $P = [p_{ij}^{(k)}]_{i=1,\dots,4, j=1,\dots,4}$ tworzą prawdopodobieństwa przejścia ze stanu S_j do stanu S_i w ciągu k -dni.

Uwaga $p_{ij}^{(k)} \neq p_{ij}^k$ - to nie jest potęga.

Czy można przewidzieć jaka będzie pogoda w długim okresie czasu? Bez względu na to, jaką pogodę zaobserwujemy jutro, lub pojutrze (albo za tydzień)?

Wektory i wartości własne macierzy kwadratowych

Niech $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$. Liczba rzeczywista $\lambda \in \mathbb{R}$ jest (rzeczywistą) wartością własną macierzy A , jeśli istnieje wektor $x \neq 0$ taki, że

$$A \cdot x = \lambda x.$$

Taki wektor nazywa się **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej λ .

Zbiór wartości własnych oznacza się $\sigma_{\mathbb{R}}(A)$.

- Jeśli x jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ , to dla dowolnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$, **wektor αx jest również wektorem własnym o tej samej wartości własnej**

$$A \cdot \alpha x = \alpha A \cdot x = \alpha \lambda x = \lambda \alpha x.$$

- Tej samej wartości własnej mogą odpowiadać **istotnie różne wektory własne** (tzn. nie związane ze sobą w wyżej omówiony sposób). Mówi się wtedy, że dana wartość własna ma **krotność większą od 1**.

Wektory i wartości własne macierzy kwadratowych

Niech $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$. Liczba rzeczywista $\lambda \in \mathbb{R}$ jest (rzeczywistą) wartością własną macierzy A , jeśli istnieje wektor $x \neq 0$ taki, że

$$A \cdot x = \lambda x.$$

Taki wektor nazywa się **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej λ .

Zbiór wartości własnych oznacza się $\sigma_{\mathbb{R}}(A)$.

- Jeśli x jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ , to dla dowolnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$, **wektor αx jest również wektorem własnym o tej samej wartości własnej**

$$A \cdot \alpha x = \alpha A \cdot x = \alpha \lambda x = \lambda \alpha x.$$

- Tej samej wartości własnej mogą odpowiadać **istotnie różne wektory własne** (tzn. nie związane ze sobą w wyżej omówiony sposób). Mówi się wtedy, że dana wartość własna ma **krotność większą od 1**.

Wektory i wartości własne macierzy kwadratowych

Niech $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$. Liczba rzeczywista $\lambda \in \mathbb{R}$ jest (rzeczywistą) wartością własną macierzy A , jeśli istnieje wektor $x \neq 0$ taki, że

$$A \cdot x = \lambda x.$$

Taki wektor nazywa się **wektorem własnym** odpowiadającym wartości własnej λ .

Zbiór wartości własnych oznacza się $\sigma_{\mathbb{R}}(A)$.

- Jeśli x jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ , to dla dowolnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$, **wektor αx jest również wektorem własnym o tej samej wartości własnej**

$$A \cdot \alpha x = \alpha A \cdot x = \alpha \lambda x = \lambda \alpha x.$$

- Tej samej wartości własnej mogą odpowiadać **istotnie różne wektory własne** (tzn. nie związane ze sobą w wyżej omówiony sposób). Mówi się wtedy, że dana wartość własna ma **krotność większą od 1**.

Zauważmy, że dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i wektora x

$$A \cdot x = \lambda x \iff (A - \lambda I_n) \cdot x = 0$$

oraz

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Równość $(A - \lambda I_n) \cdot x = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

- Liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną macierzy $A \iff$ układ równań ma **niezerowe** rozwiązanie, tzn. istnieją liczby $x_1, \dots, x_n$ ($x_i \neq 0$ dla jakiegoś i) spełniające układ (wektor $x = [x_1, \dots, x_n]$ będzie wektorem własnym).
- **Twierdzenie Kroneckera-Capelliego** mówi, że układ ma rozwiązanie **niezerowe** $\iff$ **wyznacznik** $\det(A - \lambda I_n)$ jest równy zero.
- Definicję wyznacznika macierzy można znaleźć w każdym podręczniku tzw. algebry liniowej. **Dla przykładu**

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Chcąc znaleźć (rzeczywiste) wartości własne macierzy A trzeba rozwiązać (względem niewiadomej λ) równanie

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Są też inne metody.

Nie każda macierz ma rzeczywiste wartości własne.

Przykład

Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

nie ma rzeczywistych wartości własnych: $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \det\begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2. \end{aligned}$$

Równanie $\lambda^2 + 2 = 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych (lecz dwa pierwiastki zespolone $\pm i\sqrt{2}$).

Promień spektralny

Dla macierzy $A = [a_{ij}]$, dla których $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ określa się tzw. **promień spektralny**

$$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)\}.$$

Przykład

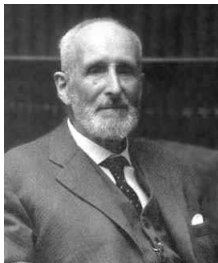
Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda + \lambda^2. \end{aligned}$$

Zatem wartości własne są pierwiastkami równania $\lambda^2 + \lambda = 0$, tj. $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \{0, -1\}$.
W konsekwencji promień spektralny $r(A) = 1$.

Twierdzenie Perrona-Frobeniusa



Oskar Perron
(1880 – 1975)



Georg Frobenius
(1849 – 1917)

O. Perron – promień spektralny

Twierdzenie Perrona

Jeśli macierz $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ jest **nieujemna**, to:

- $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ oraz promień spektralny jest (rzeczywistą) wartością własną, tzn. $r(A) \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$,
- której odpowiada **nieujemny wektor własny** $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, tzn.

$$A \cdot x = r(A)x$$

Wadą twierdzenie Perrona jest to, że wektor własny x odpowiadający promieniowi spektralnemu **nie jest** wyznaczony jednoznacznie: promieniowi spektralnemu, jako wartości własnej mogą odpowiadać istotnie różne wektory własne.

Inaczej mówiąc $r(A)$ może być wartością własną o krotności większej od 1.

Niestety równość $r(A) = 0$ jest możliwa.

G. Frobenius – Macierze nieredukowalne

- Macierz A wymiaru $(n \times n)$ jest **nieredukowalna**, gdy $A \geq 0$ i $(I_n + A)^{n-1} > 0$.

Definicja jest inna; podany warunek jest jednak równoważny nieredukowalności w przypadku macierzy nieujemnych.

- Macierze dodatnie są nieredukowalne.

Twierdzenie Perrona-Frobeniusa

Jeśli macierz A jest **nieujemna i nieredukowalna**, to:

- $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, promień spektralny $r(A)$ jest **dodatni** i jest wartością własną o **dodatnim** wektorze własnym x ;
- $r(A)$ ma krotność 1; w szczególności istnieje **dokładnie jeden dodatni stochastyczny** wektor własny $p = [p_1, \dots, p_n]^T$ tzn. taki, że $p_i > 0$ dla $i = 1, \dots, n$, **$p_1 + \dots + p_n = 1$** oraz **$A \cdot p = r(A)p$** .
- Jeżeli pewnej wartości własnej $\mu \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ odpowiada nieujemny wektor własny y , to $\mu = r(A)$ i $y = \alpha p$ dla pewnej $\alpha > 0$.

Wektor p nazywa się **wektorem Perrona**.

Macierze stochastyczne

- Macierz **nieujemna** $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ jest **stochastyczna**, gdy suma współczynników z każdej kolumny jest równa 1, tzn. dla dowolnego $j = 1, \dots, n$,

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1.$$

Przykład

Macierz przejścia

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

jest (kolumnowo) stochastyczna.

Fakt

Jeśli macierz A jest stochastyczna, to $r(A) = 1$.

Kluczowy fakt - wniosek z twierdzenia Perrona-Frobeniusa

Wniosek

Niech macierz A będzie **stochastyczna i nieredukowalna**. Wtedy:

- $r(A) = 1 \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$;
- istnieje **dokładnie jeden dodatni stochastyczny wektor własny** $p = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ tzn. taki, że

$$A \cdot p = p, \quad p_1 + \dots + p_n = 1 \quad \text{oraz} \quad p_i > 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n.$$

- Dodatkowo **metoda potęgowa** pozwala wyliczyć

$$p = \frac{1}{k} \lim_{k \rightarrow \infty} A^k \cdot e$$

gdzie $e = [1, 1, \dots, 1]$ oraz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = p \cdot e^T.$$

oznacza to, że **dla dowolnego wektora stochastycznego x**

$$A^k \cdot x \rightarrow p, \quad \text{gdy} \quad k \rightarrow \infty.$$

- 1 Twierdzenie Perrona-Frobeniusa wraz powyższym wnioskiem **pozwała** więc na znalezienie **dodatniego stochastycznego wektora własnego dla dowolnej nieredukowalnej nieujemnej macierzy stochastycznej** przy pomocy zbieżnej i stabilnej metody numerycznej (metody „potęgowej”). Jest on wyznaczony jednoznacznie.
- 2 Obliczenia te można przeprowadzić „ręcznie” (rozwiązując odpowiedni układ równań). Metoda potęgowa ma zastosowanie, gdy wymiar macierzy n jest dużą liczbą.

To jest dokładnie to, czego potrzebujemy, aby odpowiedzieć na pytanie o długofalową prognozę pogody!

Wracamy do prognozowania pogody

Przypomnijmy, że dana jest macierz przejść

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Jest to macierz:

- stochastyczna $\sum_{i=1}^4 p_{ij} = 1$ dla każdego $j = 1, \dots, 4$ (suma wyrazów w każdej kolumnie jest 1);
- nieredukowalna, bo jest dodatnia.

A zatem z twierdzenia Perrona-Frobeniusa wynika, że

- istnieje dokładnie jeden wektor stochastyczny $p = [p_1, p_2, p_3, p_4]^T$, gdzie $p_i > 0$, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, taki, że
- dla każdego wektora rozkładu prawdopodobieństwa pogody x

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k \cdot x = p.$$

Stan stacjonarny

Oznacza to, że dla dużych k (po dużej liczbie dni), niezależnie od wyjściowego stanu pogody proces dąży do **równowagi statystycznej**, w których prawdopodobieństwa wszystkich stanów są stałe

Odpowiedź na zasadnicze pytanie o prognozę

Znajdujemy wektor Perrona $p = [p_1, p_2, p_3, p_4]^T$ dla macierzy P rozwiązując równanie macierzowe $P \cdot p = p$ czyli układ równań

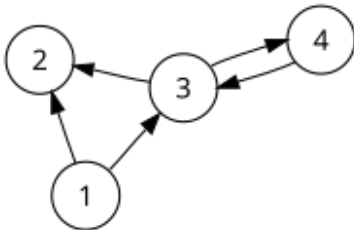
$$\begin{cases} p_1 = p_{11}p_1 + p_{12}p_2 + p_{13}p_3 + p_{14}p_4 \\ p_2 = p_{21}p_1 + p_{22}p_2 + p_{23}p_3 + p_{24}p_4 \\ p_3 = p_{31}p_1 + p_{32}p_2 + p_{33}p_3 + p_{34}p_4 \\ p_4 = p_{41}p_1 + p_{42}p_2 + p_{43}p_3 + p_{44}p_4 \end{cases}$$

z niewiadomymi p_1, p_2, p_3, p_4 . Otrzymujemy $p_1 = 0.26$, $p_2 = 0.33$, $p_3 = 0.25$, $p_4 = 0.16$. Oznacza to, że długofalowo stan S_i wystąpi z prawdopodobieństwem p_i .

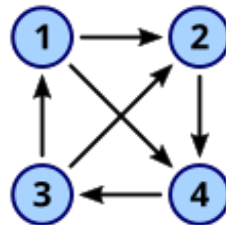
Zatem **na dłuższą metę, pogoda będzie deszczowa z prawdopodobieństwem 33%**.

Związki własności macierzy z grafem powiązań

Popatrzmy na dwa grafy skierowane o czterech stanach



(a) Graf niespójny



(b) Graf spójny

Macierz przejścia grafu jest nieredukowalna wtedy i tylko wtedy, gdy ten graf jest spójny, macierz grafu niespójnego nie jest nieredukowalna. Zatem dla grafu z rysunku (a) nie zachodzi twierdzenie Perrona-Frobeniusa, zaś dla grafu (b) twierdzenie Perrona-Frobeniusa zachodzi (jest to tzw. graf turniejowy).

Twierdzenie Perrona-Frobeniusa ma **ważne zastosowania**:

- 1 w teorii prawdopodobieństwa (ergodyczność łańcuchów Markowa);
- 2 w teorii układów dynamicznych (przesunięcia skończonego typu);
- 3 w ekonomii i finansach (twierdzenie Okishio, warunek Hawkinsa-Simona);
- 4 w demografii (macierzowe modele populacji Lesliego);
- 5 w sieciach społecznościowych (proces uczenia się DeGroota);
- 6 w wyszukiwarkach internetowych (PageRank);
- 7 w tworzeniu rankingów sportowych.
- 8 i w innych zagadnieniach.

Dziękuję za uwagę

Twierdzenie Perrona-Frobeniusa ma **ważne zastosowania**:

- 1 w teorii prawdopodobieństwa (ergodyczność łańcuchów Markowa);
- 2 w teorii układów dynamicznych (przesunięcia skończonego typu);
- 3 w ekonomii i finansach (twierdzenie Okishio, warunek Hawkinsa-Simona);
- 4 w demografii (macierzowe modele populacji Lesliego);
- 5 w sieciach społecznościowych (proces uczenia się DeGroota);
- 6 w wyszukiwarkach internetowych (PageRank);
- 7 w tworzeniu rankingów sportowych.
- 8 i w innych zagadnieniach.

Dziękuję za uwagę



Miś **Koala** (*Phascolarctos cinereus*) jest zwierzęciem leniwym, śpiącym nawet do 20 godzin na dobę. Jest też bardzo wybredna. Załóżmy, że pewien miś koala ma 3 ulubione drzewa eukaliptusa (jak na rysunku).



Drzewa eukaliptusa w australijskim lesie (wymagana odrobina wyobraźni).

Dla $i, j \in \{1, 2, 3\}$, niech p_{ij} oznacza prawdopodobieństwo, że koala będzie jadła na drzewie i następnego dnia, pod warunkiem że jadła na drzewie j danego dnia.

Wiadomo, że:

- Z prawdopodobieństwem $q \in (0,1)$, koala pozostanie na tym samym drzewie następnego dnia.
- Ponieważ jest leniwa, koala przemieszcza się tylko na drzewa sąsiadujące: jeśli jadła na drzewie 2 pewnego dnia, to następnego dnia przeniesie się albo na drzewo 1, albo na drzewo 3 z równym prawdopodobieństwem, lub pozostanie na miejscu. Jeśli jadła na drzewie 1 lub 3, to przeniesie się tylko na drzewo 2 lub pozostanie na miejscu.

Oto zadanie:

- Dla opisanych powyżej prawdopodobieństw p_{ij} , wypisz macierz $P = [p_{ij}]_{1 \leq i,j \leq 3}$, zwaną **macierzą przejścia** modelu, w zależności od q . Wyjaśnij, co reprezentuje (i,j) -ty element potęgi macierzy P^k .
- Pokaż, że promień spektralny $r(P) = 1$ oraz że 1 **jest wartością własną ściśle dominującą**, tzn. każda wartość własna jest mniejsza niż 1.
- Na dłuższą metę, co można powiedzieć o proporcji dni, które koala spędza na każdym z drzew?