

*Pierwiastki równań sześciennych
a odkrycie liczb zespolonych*

Bogdan Balcerzak

10 października 2025 r.

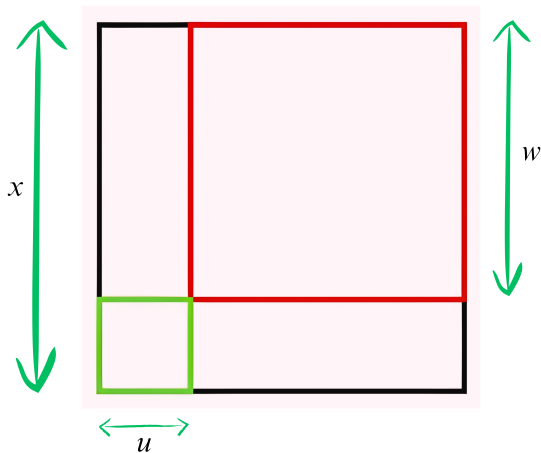
Mohammad ibn Musa al-Chuwarizmi (ok. 780– 850), perski matematyk w *Al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dżabr wa-al-mukabala* (*Krótką księgą o rachowaniu przez dopełnianie i równoważenie*) badał równania stopnia drugiego typu (tylko liczby dodatnie wtedy uznawano):

$$x^2 + bx = c, \quad x^2 + c = bx, \quad x^2 = bx + c.$$

Rozważmy $x^2 = bx + c$, gdzie $b, c > 0$.

$$x = u + w, \quad w \geq u$$

$$x^2 = u^2 + w^2 + 2uw$$



$$w^2 = c + u^2;$$

$$x^2 = u^2 + (c + u^2) + (2u)w$$

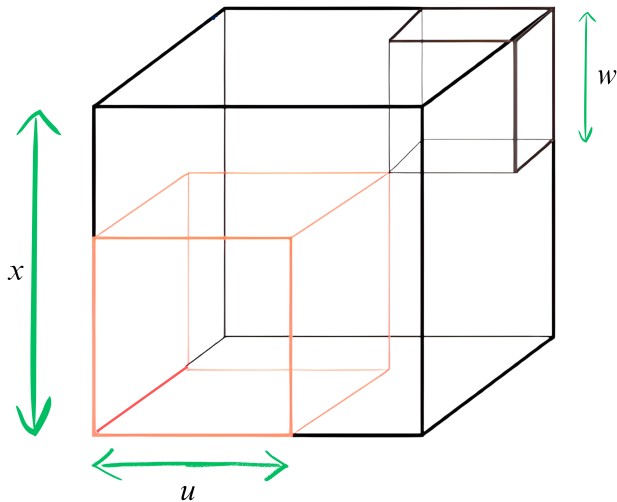
$$x^2 = c + 2u(u + w)$$

$$x^2 = c + bx, \quad b = 2u$$

$$x = u + w = \frac{b}{2} + \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$$

Równania algebraiczne stopnia 3.

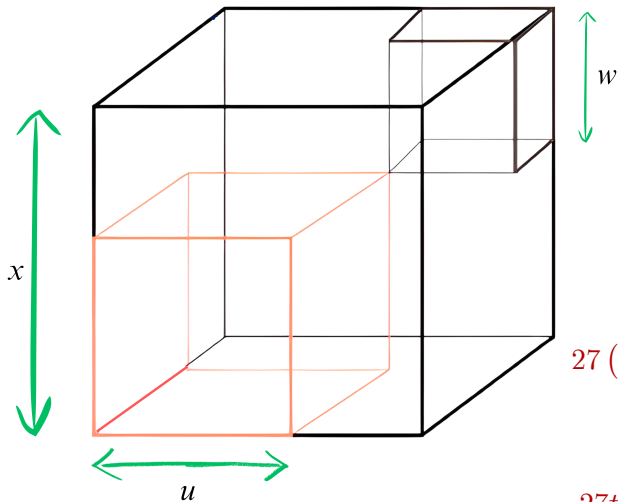
Metodę al-Chuwarizmiego zaadoptujmy do równania typu $x^3 = px + q$, gdzie p i q są dodatnie.



$$x^3 = px + q$$

$$x = u + w$$

$$\begin{aligned} x^3 &= u^3 + w^3 + 3u^2w + 3uw^2 \\ &= 3uw(u + w) + (u^3 + w^3) \\ &= 3uwx + (u^3 + w^3) \end{aligned}$$



$$p = 3uw$$

$$q = u^3 + w^3$$

$$p^3 = 27u^3w^3$$

$$w^3 = q - u^3$$

$$27(u^3)^2 - 27u^3q + p^3 = 0$$

$$u^3 = t$$

$$27t^2 - 27qt + p^3 = 0$$

Równania algebraiczne stopnia 3.

Scipio del Ferro (1465–1526) — odkrywca metody (początek XVI w.)

Hannibal Nave — zięć Ferro

Antonio Mario Fiori — uczeń Ferro

Niccolò Fontana (Tartaglia) (1500–1557) — odkrywca metody (1535/1536)

Girolamo Cardano (1501–1576) — matematyk, lekarz, mechanik, jako jeden z pierwszych dopuszczał rozwiązania inne niż dodatnie, „rozpowszechnił metodę” (*Ars magna*, 1545 r.)

Rafael Bombelli (1526–1572) — uczeń Cardano, spisał znane informacje o liczbach zespolonych w książce *L'Algebra* (1572 r.).

Cardano wzorując się na *Boskiej Komedii* Dantego przekazał mu metodę (tajemnicę przekazaną mu przez Tartaglię) zapisał wierszem:

*„Kiedy sześcian z rzeczami razem
Równe są jakiejś liczbie,
Znajdą się dwie inne, na nią rozdzielające się ...”*

(z przekładu Witolda Więśława w „Matematyka i jej historia”, Opole, 1997).

Problem: Jak rozwiązać równanie algebraiczne

$$x^3 + px + q = 0, \tag{1}$$

w którym niewiadoma x oraz współczynniki p, q są liczbami rzeczywistymi?

Każde równanie stopnia trzeciego

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

można doprowadzić do postaci (1) — stosując podstawienie

$$y = x - \frac{a}{3}.$$

Istotnie:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(x - \frac{a}{3}\right) + c \\ = x^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + \left(\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right). \end{aligned}$$

Stosując tożsamość

$$(u + w)^3 - 3uw(u + w) - u^3 - w^3 = 0$$

zauważamy, że jeśli wyznaczymy takie u i v , aby

$$\begin{cases} -3uw = p, \\ -u^3 - w^3 = q, \end{cases} \quad (2)$$

to $x := u + w$ jest rozwiązaniem równania (1). Załóżmy, że istnieją u, w spełniające równości w (2).

Załóżmy dodatkowo, że $u \neq 0$. Z pierwszej równości $w = -\frac{p}{3u}$. Razem z drugą równością prowadzi to do

$$(u^3)^2 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Istotnie:

Skoro $-u^3 - w^3 = q$ i $w = -\frac{p}{3u}$, to zachodzą równoważnie kolejne zdania:

$$-u^3 - \left(-\frac{p}{3u}\right)^3 = q.$$

$$-u^3 - \frac{1}{(-u)^3} \cdot \left(\frac{p}{3}\right)^3 = q,$$

$$(u^3)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = q(-u)^3,$$

$$(u^3)^2 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Zatem u^3 spełnia równanie kwadratowe

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

— zwane równaniem **rozwiązującym** dla równania (1).

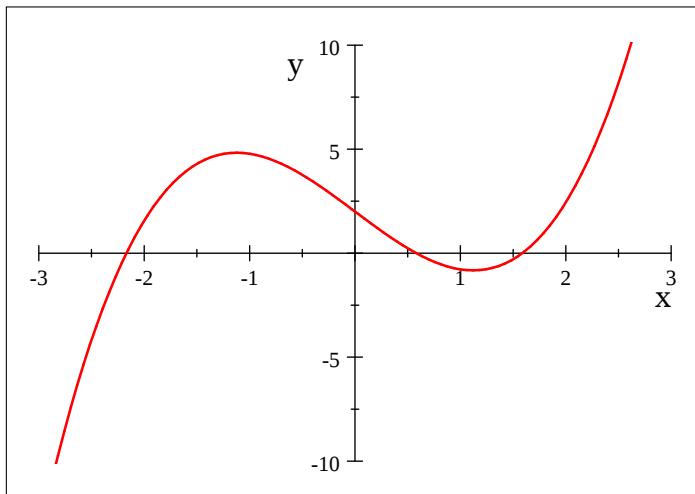
Skoro $u^3 + w^3 = -q$ oraz $u^3 w^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$, to na mocy wzorów Viète'a zauważamy, że w^3 jest drugim pierwiastkiem równania rozwiązującego. Wówczas jeżeli

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad w^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

to $u + w$ jest rozwiązaniem równania (1), którego wyróżnik jest równy $\Delta = 4\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)$.

Przykład ($p = -3\sqrt[3]{2}$, $q = 2$). Rozważmy równanie

$$x^3 - 3\sqrt[3]{2} x + 2 = 0$$



$$x \mapsto x^3 - 3\sqrt[3]{2} x + 2$$

Jego równaniem rozwiązującym jest $z^2 + 2z + 2 = 0$.

Równoważne jest ono równaniu:

$$(z + 1)^2 + 1 = 0.$$

Zauważmy, że

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3\sqrt[3]{2}}{3}\right)^3 = -1 = i^2.$$

$$(z + 1)^2 = -1$$

$$(z + 1)^2 = i^2$$

$$z + 1 = i \quad \text{lub} \quad z + 1 = -i$$

$$z = -1 + i \quad \text{lub} \quad z = -1 - i$$

Gdyby istniała liczba i , taka że $i^2 = -1$, to rozwiązaniami wyjściowego równania by była liczba $u + w$, gdzie

$$u^3 = -1 + i, \quad w^3 = -1 - i.$$

Zauważamy, że

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 &= \frac{1}{2} (1 + 3i + 3i^2 + i^3) \\ &= \frac{1}{2} (1 + 3i - 3 - i) = \frac{1}{2} (-2 + 2i) \\ &= -1 + i. \end{aligned}$$

Przyjmując $u = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}$ zauważamy, że

$$\begin{aligned} u + w &= u - \frac{p}{3u} = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}} - \frac{-3\sqrt[3]{2}}{3 \cdot \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{1+i} = \frac{(1+i)^2 + \sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2}(1+i)} \\ &= \frac{1 + 2i - 1 + 2}{\sqrt[3]{2}(1+i)} = \frac{2(i+1)}{\sqrt[3]{2}(1+i)} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}. \end{aligned}$$

Rzeczywiście: $(\sqrt[3]{4})^3 - 3\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} + 2 = 4 - 3\sqrt[3]{8} + 2 = 0$.

Problem. Skonstruować zbiór, który zawiera zbiór liczb rzeczywistych oraz taką liczbę i , aby

$$i^2 = -1,$$

oraz istnieją działania dodawania i mnożenia w tym zbiorze rozszerzające działania w zbiorze liczb rzeczywistych.

Leonhard Euler (1707–1783) — termin *liczby zespolone*, symbol i , zastosowanie liczb zespolonych w analizie matematycznej

Johann Friedrich Carl Gauss (1777–1855)

William Rowan Hamilton (1805–1865)

Konstrukcja Hamiltona

W iloczynie kartezjańskim $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wprowadzamy działania dodawania i mnożenia w ten sposób, że

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\(a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

dla dowolnych par $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Ponadto $i = (0, 1)$ spełnia: $i^2 = (-1, 0)$.

Twierdzenie. Dla dowolnych $z = (a, b), z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ zachodzą:

- (1) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ [łączność],
- (2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$ [przemienność],
- (3) $z + (0, 0) = z, z \cdot (1, 0) = z$ [elementy neutralne],
- (4⁺) $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$ [element przeciwny],
- (4⁻) jeżeli $(a, b) \neq (0, 0)$, to $(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$, [odwrotność].

Postać algebraiczna liczby zespolonej

Element zbioru $\mathbb{C}$ nazywamy **liczbą zespoloną**, $\mathbb{C}$ — **zbiorem liczb zespolonych**.

Dla dowolnych liczb zespolonych $(a, 0), (b, 0) \in \mathbb{R}^2$ zachodzą:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0),$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0).$$

Po utożsamieniu dowolnej liczby rzeczywistej $b \in \mathbb{R}$ z parą $(b, 0)$ mamy

$$b \cdot i = (b, 0) \cdot (0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, b).$$

Dowolną liczbę zespoloną $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ można zapisać jako

$$z = a + bi,$$

gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi. Postać tę nazywamy **postacią algebraiczną liczby zespolonej**. Jeżeli $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to a nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby z i oznaczamy symbolem $\operatorname{Re} z$, natomiast b nazywamy **częścią urojoną** liczby zespolonej z i oznaczamy symbolem $\operatorname{Im} z$.

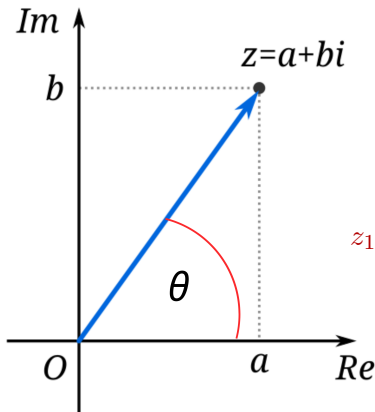
Przykład.

$$(2 + 3i) + (4 - 5i) = 6 - 2i,$$

$$\begin{aligned}(2 + 3i)(4 - 5i) &= 2(4 - 5i) + 3i(4 - 5i) \\&= 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-5i) + 3i \cdot 4 - (3i)(5i) \\&= 8 - 10i + 12i - 15i^2 \\&= 8 - 10i + 12i - 15 \cdot (-1) \\&= 23 + 2i.\end{aligned}$$

Postać trygonometryczna (współrzędne biegunowe). Wzór de Moivre'a. Niech $n \in \mathbb{N}$.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Pierwiastki z liczby zespolonej

Definicja. Pierwiastkiem z liczby zespolonej z stopnia $n \in \mathbb{N}$ nazywamy każdą taką liczbę zespoloną w , że

$$w^n = z.$$

Przykład. Znajdźmy pierwiastki zespolone stopnia drugiego z liczby $4 + 3i$. Szukamy takich liczb rzeczywistych a, b , że

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i.$$

Zatem

$$(a^2 - b^2) + 2abi = 3 + 4i. \quad (3)$$

Porównując części rzeczywiste i urojone liczb zespolonych po obu stronach w (3) otrzymujemy:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3, \\ 2ab = 4. \end{cases}$$

Pokazujemy, że: $(a, b) = (2, -1)$ lub $(a, b) = (-2, 1)$. Każda z liczb $2 - i$, $-2 + i$ jest pierwiastkiem stopnia drugiego z $3 + 4i$.

Twierdzenie (*O pierwiastkach zespolonych z liczby zespolonej*). Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz niech z będzie dowolną niezerową liczbą zespoloną zapisaną w postaci

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

dla pewnych $r > 0$ i $\theta \in \mathbb{R}$. Wówczas z ma n pierwiastków zespolonych $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ stopnia n , które można zapisać następująco:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

gdzie $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Równania algebraiczne stopnia 3.

Rozważmy pierwiastki zespolone trzeciego stopnia z liczby zespolonej $1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$:

$$1,$$

$$\varepsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3},$$

$$\varepsilon^2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Twierdzenie. Jeżeli $u + w$ jest rozwiązaniem równania (1) $x^3 + px + q = 0$, dla którego $-3uw = p$ i $-u^3 - w^3 = q$, to jego pierwiastkami są również

$$\varepsilon u + \varepsilon^2 w, \quad \varepsilon^2 u + \varepsilon w.$$

Przykład. Rozważmy równanie ($p = 3, q = 2$)

$$x^3 + 3x + 2 = 0. \quad (4)$$

Jego równaniem rozwiązującym jest $z^2 + 2z - \left(\frac{3}{3}\right)^3 = 0$, które równoważne jest poniższymi równaniami:

$$\begin{aligned}(z^2 + 2 \cdot z \cdot 1 + 1) - 2 &= 0, \\ (z + 1)^2 &= 2.\end{aligned}$$

Ma zatem dwa rozwiązania rzeczywiste. Wówczas rozwiązaniem (4) jest $u + w$, gdzie

$$u^3 = -1 + \sqrt{2}, \quad w^3 = -1 - \sqrt{2}.$$

Stąd $u + w = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}}.$

Rozważmy $\varepsilon = \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}$, $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}$.

Skoro $u = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}}$, $w = \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}}$, to pozostałymi pierwiastkami równania (4) są liczby zespolone

$$\varepsilon u + \varepsilon^2 w = \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}}{2}i.$$

oraz

$$\varepsilon^2 u + \varepsilon w = \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} + \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{1 - \sqrt{2}} - \sqrt{3}\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}}{2}i.$$

Rozważmy równanie

$$x^3 + px + q = 0, \quad (1)$$

gdzie $p, q \in \mathbb{R}$.

- Jeżeli $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0$ (czyli wyróżnik $\Delta = 4D$ równania rozwiązującego jest dodatni), to (1) ma jedno rozwiązanie rzeczywiste oraz dwa zespolone.
- Jeżeli $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$ (czyli jeśli $\Delta = 4D = 0$), to (1) ma dwa pierwiastki rzeczywiste,

$$\begin{aligned} x_1 &= \varepsilon^0 \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \varepsilon^0 \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \\ x_2 &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}q}, \end{aligned}$$

gdzie x_2 jest podwójny.

- Jeżeli $D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$ (czyli wyróżnik $\Delta = 4D$ równania rozwiązującego jest ujemny), to (1) ma trzy rozwiązania rzeczywiste.