Od mostów w Królewcu do sieci społecznościowych
czyli krótka historia zastosowań pewnego pojęcia

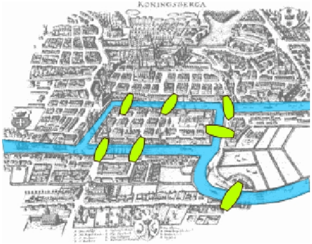
Marek Majewski

25 września 2025

WYDZIAŁ MATEMATYKI
i INFORMATYKI
Uniwersytet Łódzki

Mosty królewieckie

- Königsberg (Królewiec), Prusy 1736,
- Rzeka Pregoła – dwie wyspy połączone siedmioma mostami



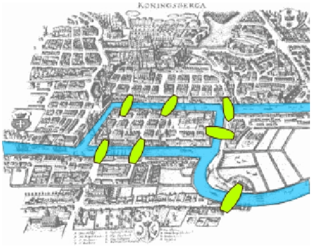
Źródło: Wikipedia

Problem mostów królewieckich

Czy możliwe jest, aby wyruszyć z dowolnej części lądowej miasta, przejść przez każdy z mostów dokładnie jeden raz i powrócić do punktu wyjściowego?

Mosty królewieckie

- Königsberg (Królewiec), Prusy 1736,
- Rzeka Pregoła – dwie wyspy połączone siedmioma mostami



Źródło: Wikipedia

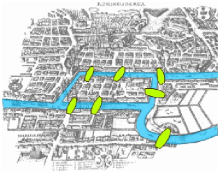
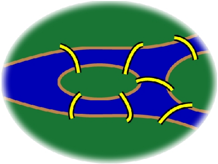
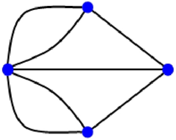
Problem mostów królewieckich

Czy możliwe jest, aby wyruszyć z dowolnej części lądowej miasta, przejść przez każdy z mostów dokładnie jeden raz i powrócić do punktu wyjściowego?

Leonhard Euler (1707– 1783) - szwajcarski matematyk, fizyk i astronom, jeden z twórców nowoczesnej matematyki.

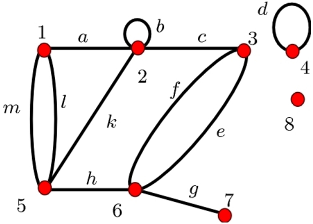
Jakob Emanuel Handmann, źródło: Wikipedia

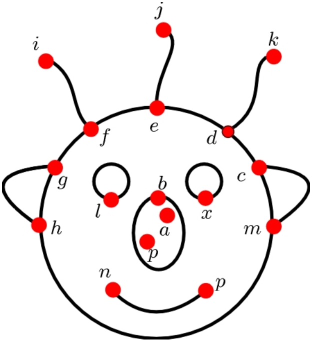
Mosty królewieckie


→

→


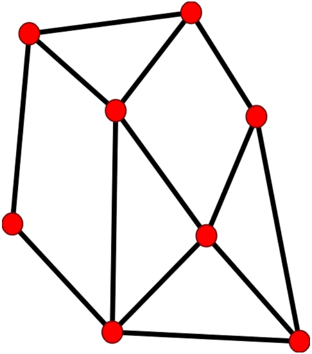
Źródło: Wikipedia

Graf to zbiór wierzchołków V wraz ze zbiorem krawędzi E czyli łuków łączących odpowiednie wierzchołki.

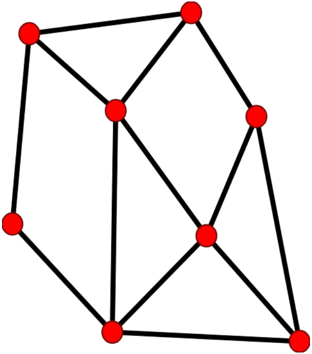




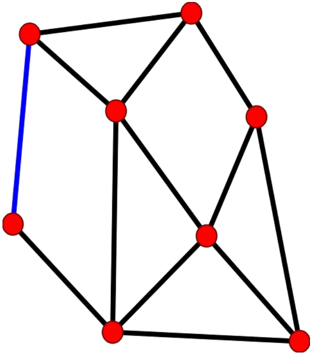
Droga w grafie to układ połączonych ze sobą kolejnych krawędzi grafu.



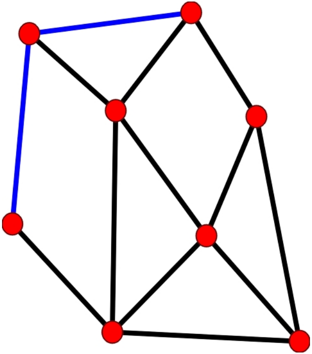
Droga w grafie to układ połączonych ze sobą kolejnych krawędzi grafu.



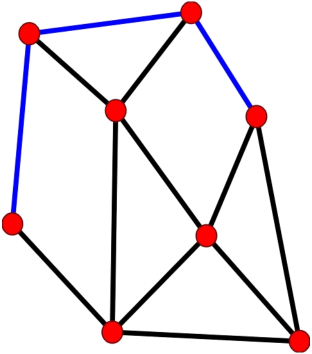
Droga w grafie to układ połączonych ze sobą kolejnych krawędzi grafu.



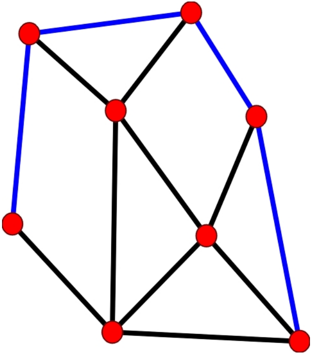
Droga w grafie to układ połączonych ze sobą kolejnych krawędzi grafu.



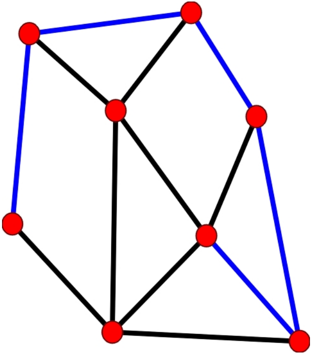
Droga w grafie to układ połączonych ze sobą kolejnych krawędzi grafu.



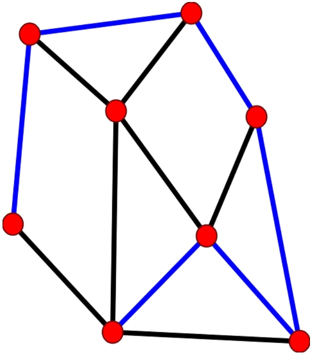
Droga w grafie to układ połączonych ze sobą kolejnych krawędzi grafu.



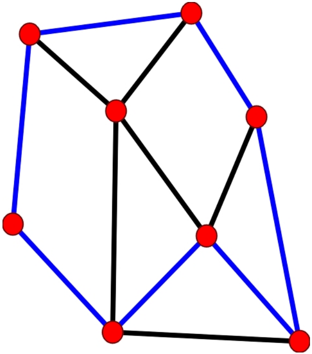
Droga w grafie to układ połączonych ze sobą kolejnych krawędzi grafu.



Droga w grafie to układ połączonych ze sobą kolejnych krawędzi grafu.

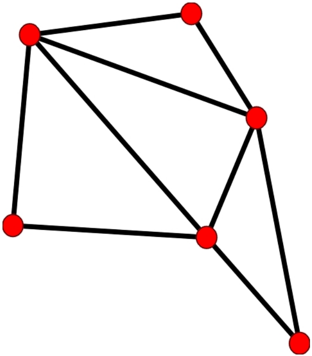


Droga w grafie to układ połączonych ze sobą kolejnych krawędzi grafu.



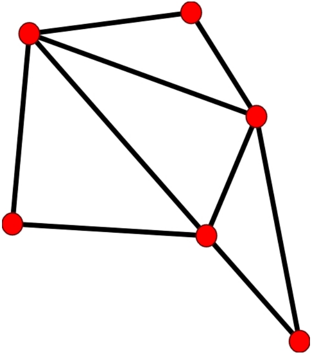
Cykl Eulera to droga, która zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku oraz przechodzi przez każdą z krawędzi grafu dokładnie jeden raz.

Stopniem wierzchołka w grafie nazywamy liczbę krawędzi, która łączy się z tym wierzchołkiem.



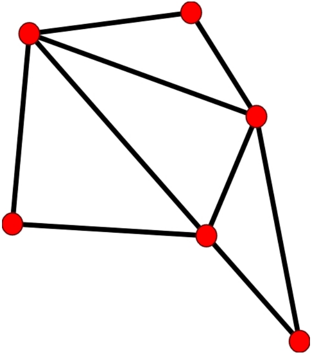
Cykl Eulera to droga, która zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku oraz przechodzi przez każdą z krawędzi grafu dokładnie jeden raz.

Stopniem wierzchołka w grafie nazywamy liczbę krawędzi, która łączy się z tym wierzchołkiem.



Cykl Eulera to droga, która zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku oraz przechodzi przez każdą z krawędzi grafu dokładnie jeden raz.

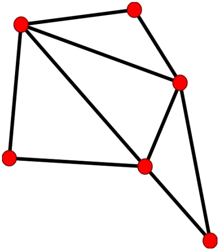
Stopniem wierzchołka w grafie nazywamy liczbę krawędzi, która łączy się z tym wierzchołkiem.

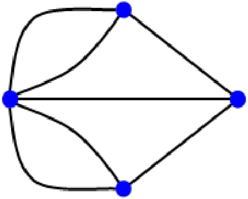


Twierdzenie (Euler, 1736)

W grafie istnieje cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek tego grafu ma stopień parzysty.

L. Euler. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.* Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Volume 8, pp. 128-140.

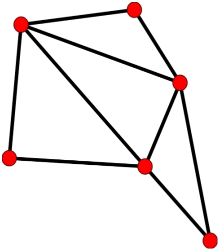


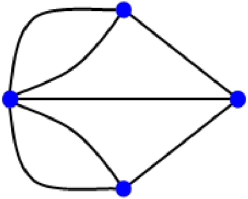


Twierdzenie (Euler, 1736)

W grafie istnieje cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek tego grafu ma stopień parzysty.

L. Euler. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.* Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Volume 8, pp. 128-140.

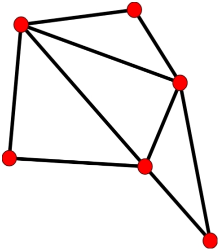


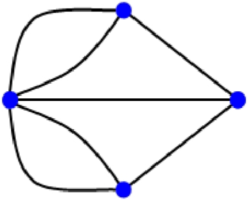


Twierdzenie (Euler, 1736)

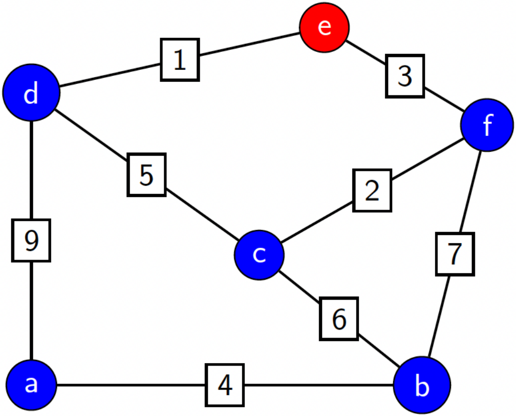
W grafie istnieje cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek tego grafu ma stopień parzysty.

L. Euler. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.* Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Volume 8, pp. 128-140.





Chcemy podłączyć do źródła energii elektrycznej pewną grupę domów. Znamy wzajemne koszty połączenia między domami oraz źródłem energii, zgodnie z rysunkiem. Jak zrobić to minimalizując całkowity koszt przedsięwzięcia?



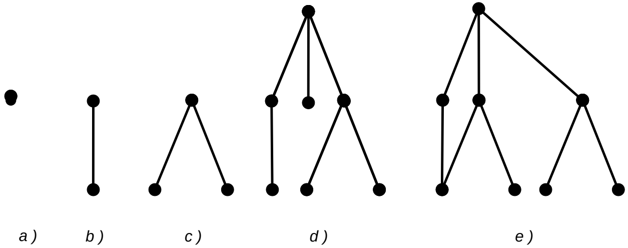
Otokar Borůvka (1899 - 1995) - czeski matematyk.

Źródło: Wikipedia

Borůvka, Otakar (1926), *"O jistém problému minimálním"*, Práce Moravské přírodovědecké společnosti, 3 (3): 37–58

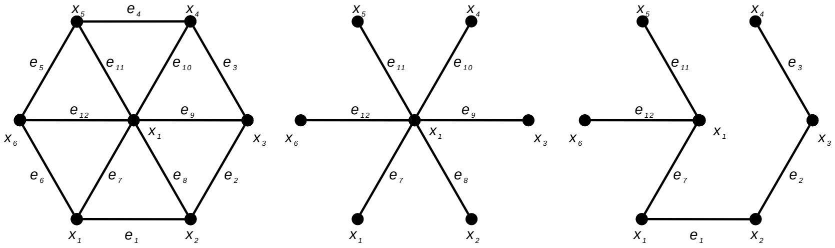
Jindřich Saxel, pracownik Zachodnio-Morawskiej Spółki Energetycznej

Drzewem nazywamy taki graf, w który dowolna dwa wierzchołkmi można połączyć drogą tylko na jeden sposób.



Minimalne drzewo rozpinające (MST)

Drzewem rozpinającym (ang. Spanning Tree) w grafie G nazywamy drzewo, które zawiera wszystkie wierzchołki grafu G oraz zbiór krawędzi drzewa jest podzbiorem zbioru krawędzi grafu G.



a) graf G

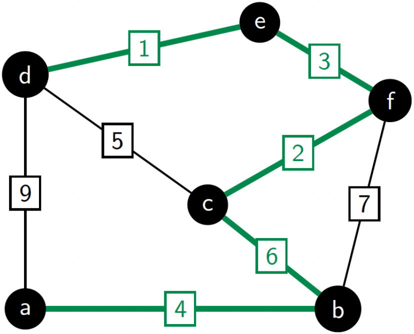
b)

Minimalne drzewo rozpinające (MST)

Jeżeli w grafie G każdej krawędzi przyporządkujemy dokładnie jedną liczbę rzeczywistą, to mówimy że graf G jest **grafem ważonym.**

Problem drzewa minimalnego

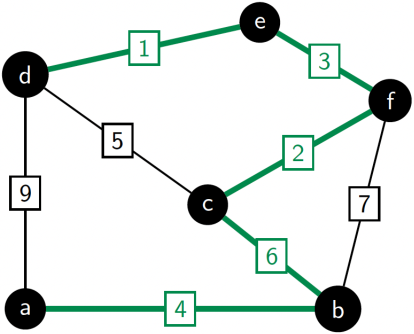
Dla danego grafu ważonego znaleźć takie drzewo rozpinające, które suma wag krawędzi będzie najmniejsza z możliwych



Jeżeli w grafie G każdej krawędzi przyporządkujemy dokładnie jedną liczbę rzeczywistą, to mówimy że graf G jest **grafem ważonym.**

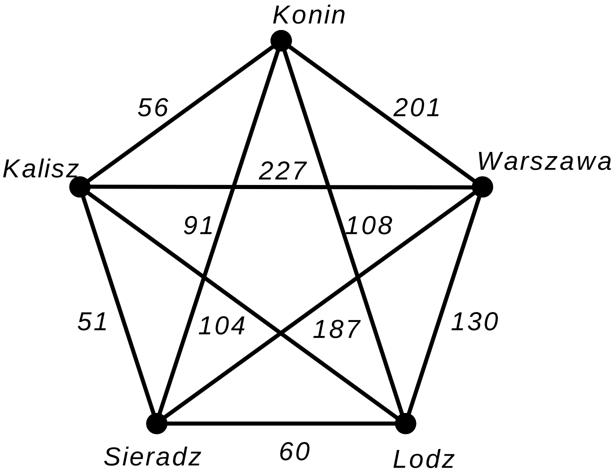
Problem drzewa minimalnego

Dla danego grafu ważonego znaleźć takie drzewo rozpinające, które suma wag krawędzi będzie najmniejsza z możliwych



Najkrótsze ścieżki

Źródło: pixabay


Konin
56
201
Kalisz
227
Warszawa
91
108
51
104
187
130
Sieradz
60
Lodz

Problem najkrótszych ścieżek

Dla danego grafu ważonego znaleźć

- najkrótszą drogę między dwoma wyróżnionymi wierzchołkami
- najkrótsze drogi pomiędzy wyróżnionym wierzchołkiem (źródłem) a wszystkimi pozostałymi wierzchołkami
- najkrótsze drogi pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków

Źródło: Wiedźmin Wiki

Źródło: Wiedźmin Wiki

Edsger Wybe Dijkstra (1930 – 2002) – holenderski naukowiec, pionier informatyki.

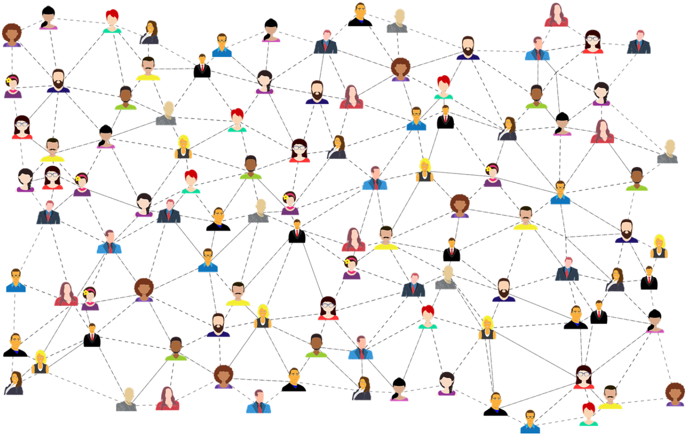
Źródło: Wikipedia

E. W. Dijkstra. *A note on two problems in connexion with graphs*. Numerische Mathematik, 1 (1959), S. 269–271.

```
Dijkstra(G,w,s):
   dla każdego wierzchołka v w V[G] wykonaj
      d[v] := nieskończoność
      poprzednik[v] := niezdefiniowane
   d[s] := 0
   Q := V
   dopóki Q niepuste wykonaj
      u := Zdejmij_Min(Q)
      dla każdego wierzchołka v – sąsiada u wykonaj
         jeżeli d[v] > d[u] + w(u, v) to
            d[v] := d[u] + w(u, v)
            poprzednik[v] := u

   Wyświetl("Droga wynosi: " + d[v])
```

Źródło: Wikipedia



Źródło: pixabay

- Problem mierzenia odległości pomiędzy wierzchołkami (osobami) – „jak duży jest świat"
- Problem istnienia kliki (każdy wierzchołek jest połączony z każdym – „każdy zna każdego"
- Przeszukiwanie grafu, w celu zbadania struktury połączeń np. proponowanie „nowych znajomych",
- Problem poszukiwania „niezbyt odległych" wierzchołków z podobnymi cechami (np. zainteresowaniami) – szukanie wspólnot

- Problem mierzenia odległości pomiędzy wierzchołkami (osobami) – „jak duży jest świat”
- Problem istnienia kliki (każdy wierzchołek jest połączony z każdym – „każdy zna każdego”
- Przeszukiwanie grafu, w celu zbadania struktury połączeń np. proponowanie „nowych znajomych”,
- Problem poszukiwania „niezbyt odległych” wierzchołków z podobnymi cechami (np. zainteresowaniami) – szukanie wspólnot

- Problem mierzenia odległości pomiędzy wierzchołkami (osobami) – „jak duży jest świat”
- Problem istnienia kliki (każdy wierzchołek jest połączony z każdym – „każdy zna każdego”
- Przeszukiwanie grafu, w celu zbadania struktury połączeń np. proponowanie „nowych znajomych”,
- Problem poszukiwania „niezbyt odległych” wierzchołków z podobnymi cechami (np. zainteresowaniami) – szukanie wspólnot

- Problem mierzenia odległości pomiędzy wierzchołkami (osobami) – „jak duży jest świat”
- Problem istnienia kliki (każdy wierzchołek jest połączony z każdym – „każdy zna każdego”
- Przeszukiwanie grafu, w celu zbadania struktury połączeń np. proponowanie „nowych znajomych”,
- Problem poszukiwania „niezbyt odległych” wierzchołków z podobnymi cechami (np. zainteresowaniami) – szukanie wspólnot

Problem kolorowania

Nadać elementom grafu etykiety (kolory), tak aby sąsiadujące elementy nie miały identycznej etykiety (koloru). Optymalne pokolorowanie polega na użyciu minimalnej liczby kolorów.

Co możemy kolorować?

- wierzchołki grafu,
- krawędzie grafu,
- regiony grafu

Zastosowania kolorowania

- problemy kombinatoryczne (układanie planu zajęć, grafiku zadań, przydzielanie częstotliwości),
- kompilatory – optymalizuje czas dostępu do zmiennych, z których program korzysta,
- sudoku

Problem kolorowania

Nadać elementom grafu etykiety (kolory), tak aby sąsiadujące elementy nie miały identycznej etykiety (koloru). Optymalne pokolorowanie polega na użyciu minimalnej liczby kolorów.

Co możemy kolorować?

- wierzchołki grafu,
- krawędzie grafu,
- regiony grafu

Zastosowania kolorowania

- problemy kombinatoryczne (układanie planu zajęć, grafiku zadań, przydzielanie częstotliwości),
- kompilatory – optymalizuje czas dostępu do zmiennych, z których program korzysta,
- sudoku

Problem kolorowania

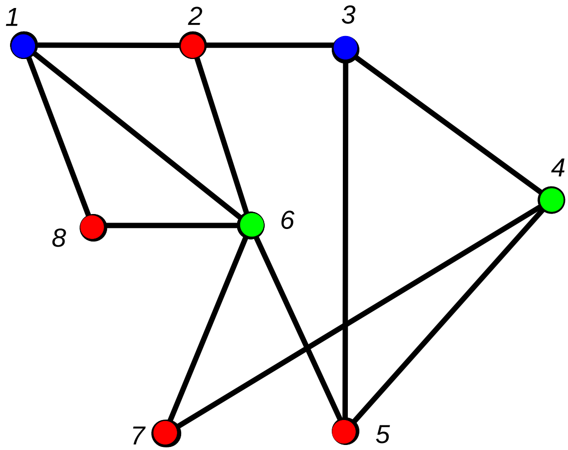
Nadać elementom grafu etykiety (kolory), tak aby sąsiadujące elementy nie miały identycznej etykiety (koloru). Optymalne pokolorowanie polega na użyciu minimalnej liczby kolorów.

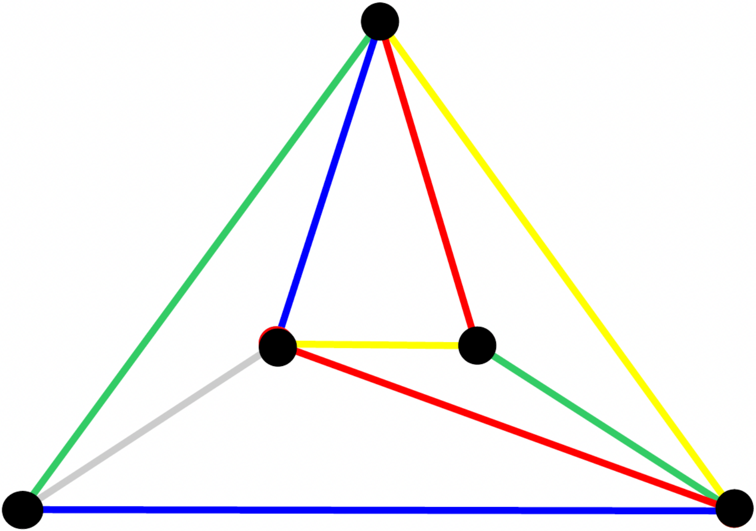
Co możemy kolorować?

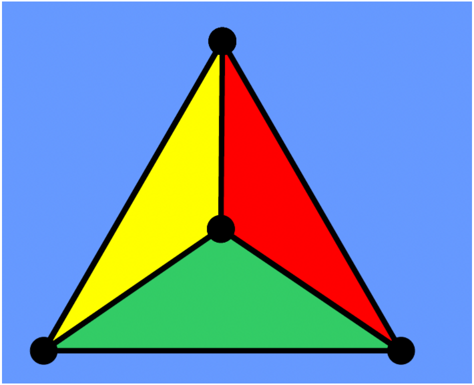
- wierzchołki grafu,
- krawędzie grafu,
- regiony grafu

Zastosowania kolorowania

- problemy kombinatoryczne (układanie planu zajęć, grafiku zadań, przydzielanie częstotliwości),
- kompilatory – optymalizuje czas dostępu do zmiennych, z których program korzysta,
- sudoku


1
2
3
4
6
8
7
5





Twierdzenie (O czterech kolorach, 1976)

Każda mapa może być pokolorowana co najwyżej czterema kolorami.

- hipoteza postawiona w 1840 A. F. Möbius, w 1852 (niezależnie) F. Guthrie
- 1975, dowód wspomagany komputerowo K. Appela i W. Haken, USA.
- 2004 istotnie mniej skomplikowany dowód Robertson, Sanders, Seymour i Thomas, USA.

Twierdzenie (O czterech kolorach, 1976)

Każda mapa może być pokolorowana co najwyżej czterema kolorami.

- hipoteza postawiona w 1840 A. F. Möbius, w 1852 (niezależnie) F. Guthrie
- 1975, dowód wspomagany komputerowo K. Appela i W. Haken, USA.
- 2004 istotnie mniej skomplikowany dowód Robertson, Sanders, Seymour i Thomas, USA.

Twierdzenie (O czterech kolorach, 1976)

Każda mapa może być pokolorowana co najwyżej czterema kolorami.

- hipoteza postawiona w 1840 A. F. Möbius, w 1852 (niezależnie) F. Guthrie
- 1975, dowód wspomagany komputerowo K. Appela i W. Haken, USA.
- 2004 istotnie mniej skomplikowany dowód Robertson, Sanders, Seymour i Thomas, USA.

Twierdzenie (O czterech kolorach, 1976)

Każda mapa może być pokolorowana co najwyżej czterema kolorami.

- hipoteza postawiona w 1840 A. F. Möbius, w 1852 (niezależnie) F. Guthrie
- 1975, dowód wspomagany komputerowo K. Appela i W. Haken, USA.
- 2004 istotnie mniej skomplikowany dowód Robertson, Sanders, Seymour i Thomas, USA.