



Politechnika Łódzka
Instytut Automatyki

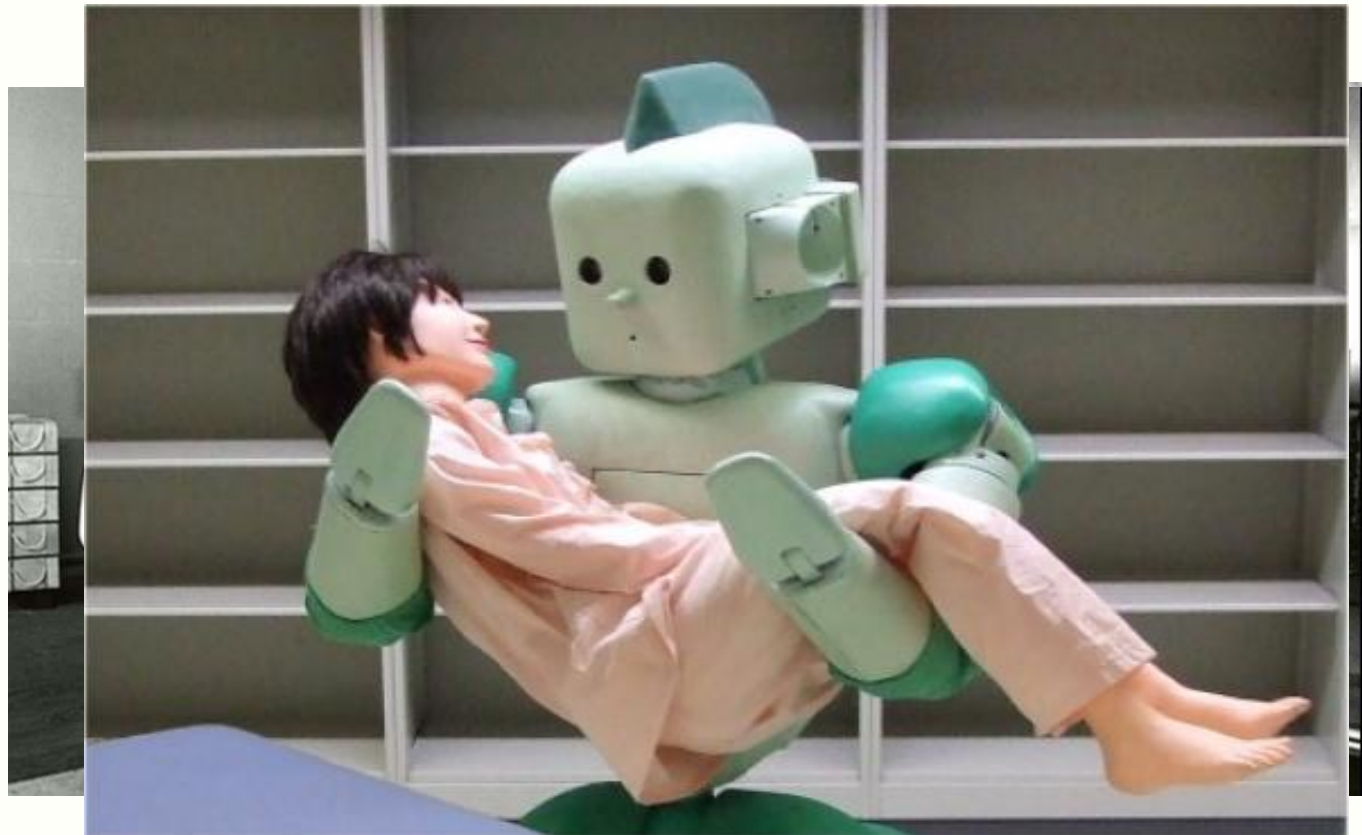
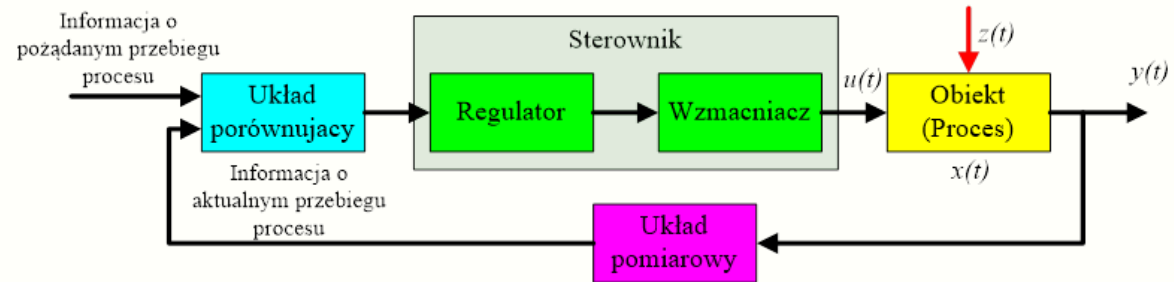
Robotyka – matematyka i zabawa

Prof. Grzegorz Granosik

Robotyka, Automatyka, Sterowanie

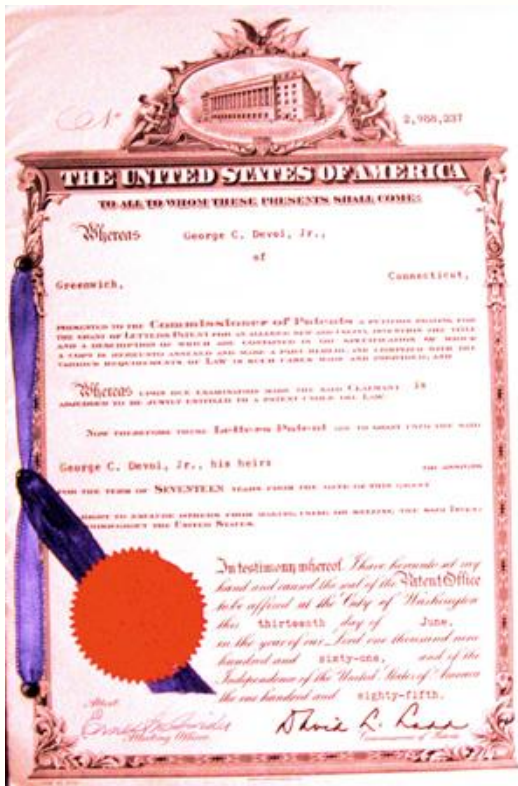


Domeną robotyki są również rozważania nad sztuczną inteligencją – w niektórych środowiskach robotyka jest wręcz z nią utożsamiana.

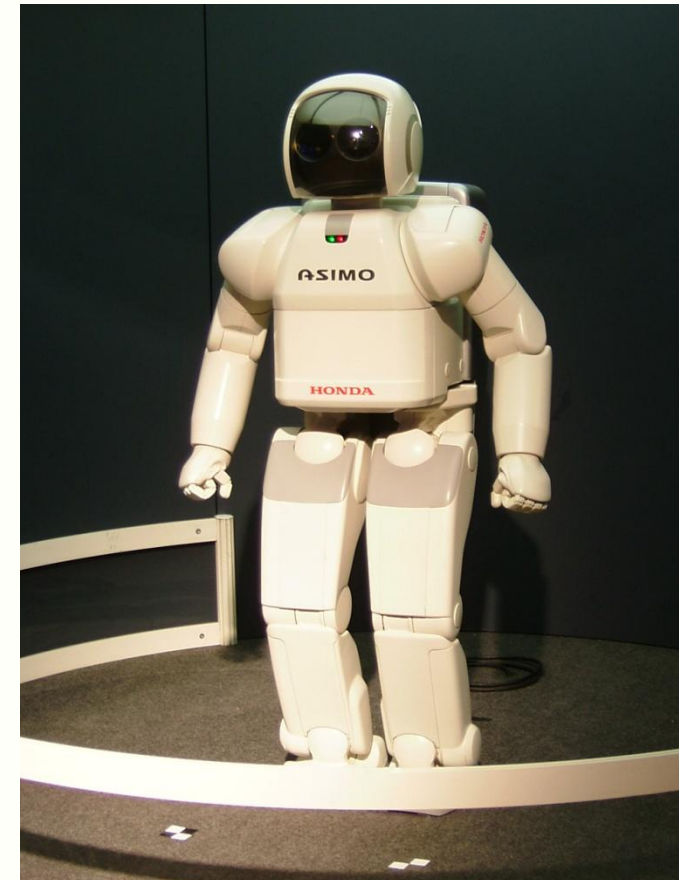
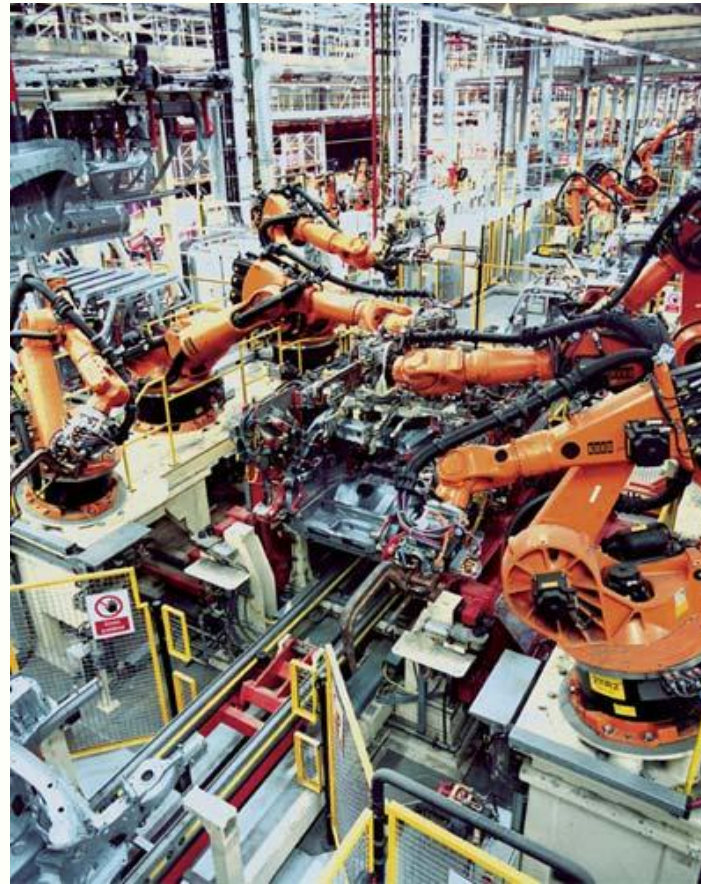


Od patentu Devola po roboty humanoidalne

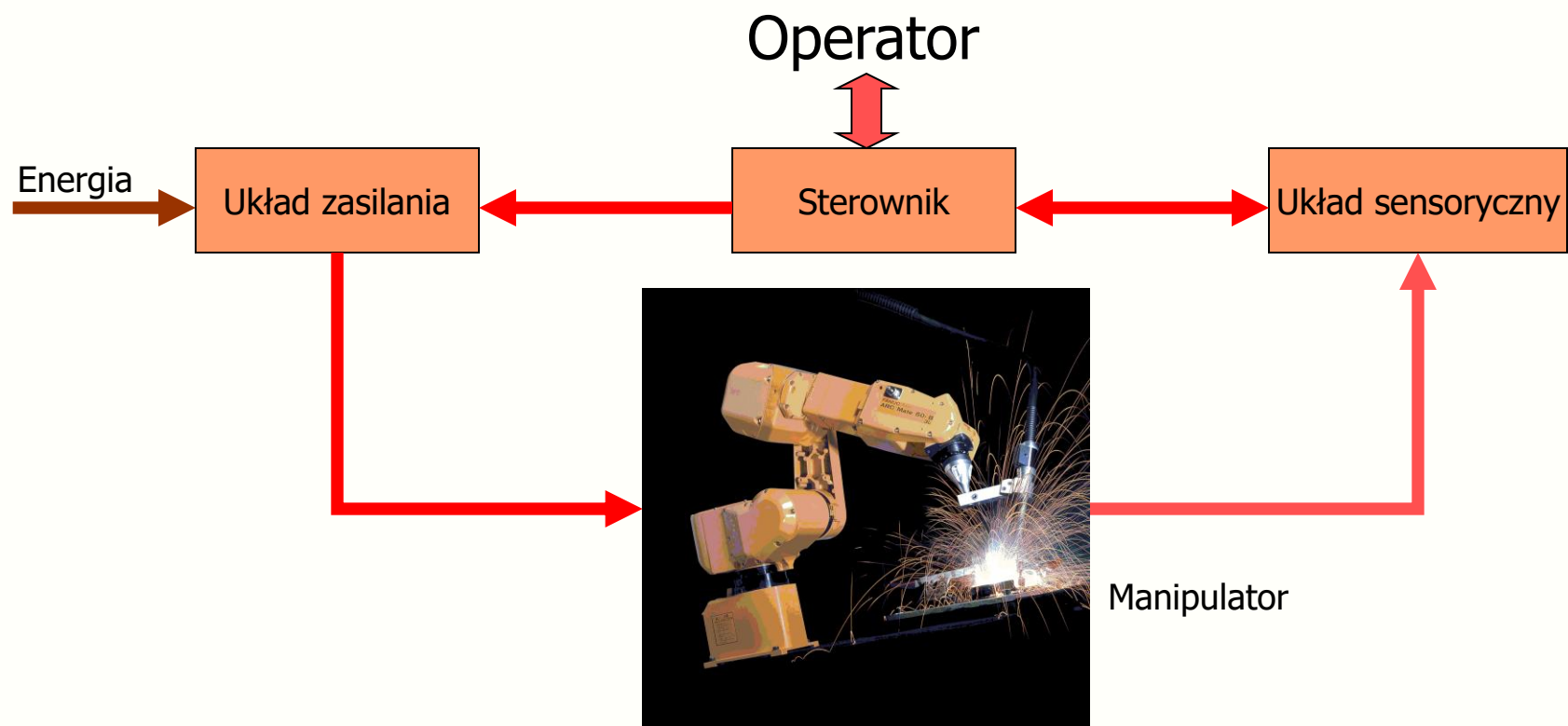
"The present invention makes available for the first time a more or less general purpose machine that has universal application to a vast diversity of applications where cyclic control is desired,, - Patent USA No. 2,988,237



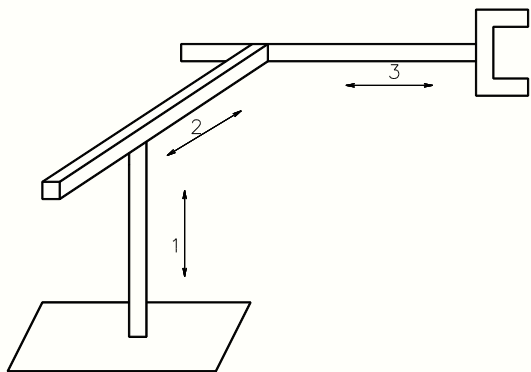
Patent USA No. 2,988,237



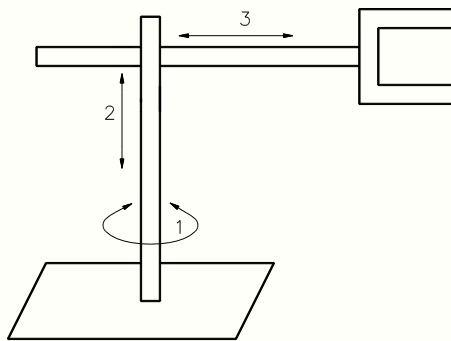
Podstawowe podzespoły robota



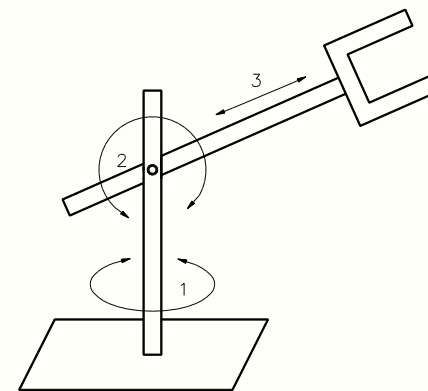
Struktury kinematyczne manipulatorów



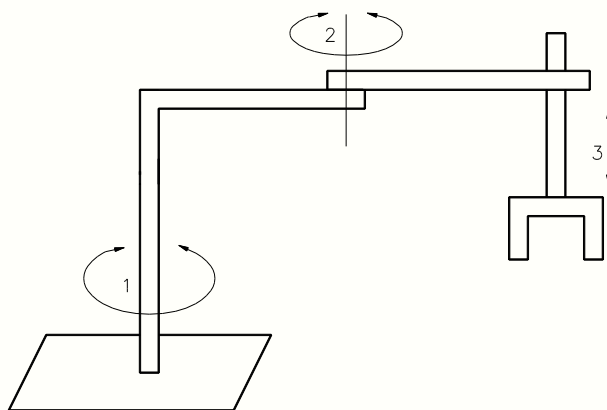
M. kartezjański



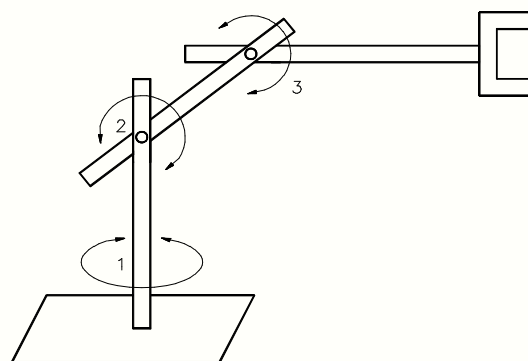
M. cylindryczny



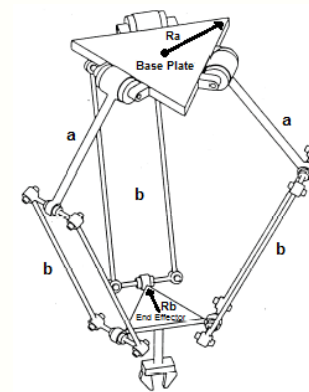
M. sferyczny



SCARA



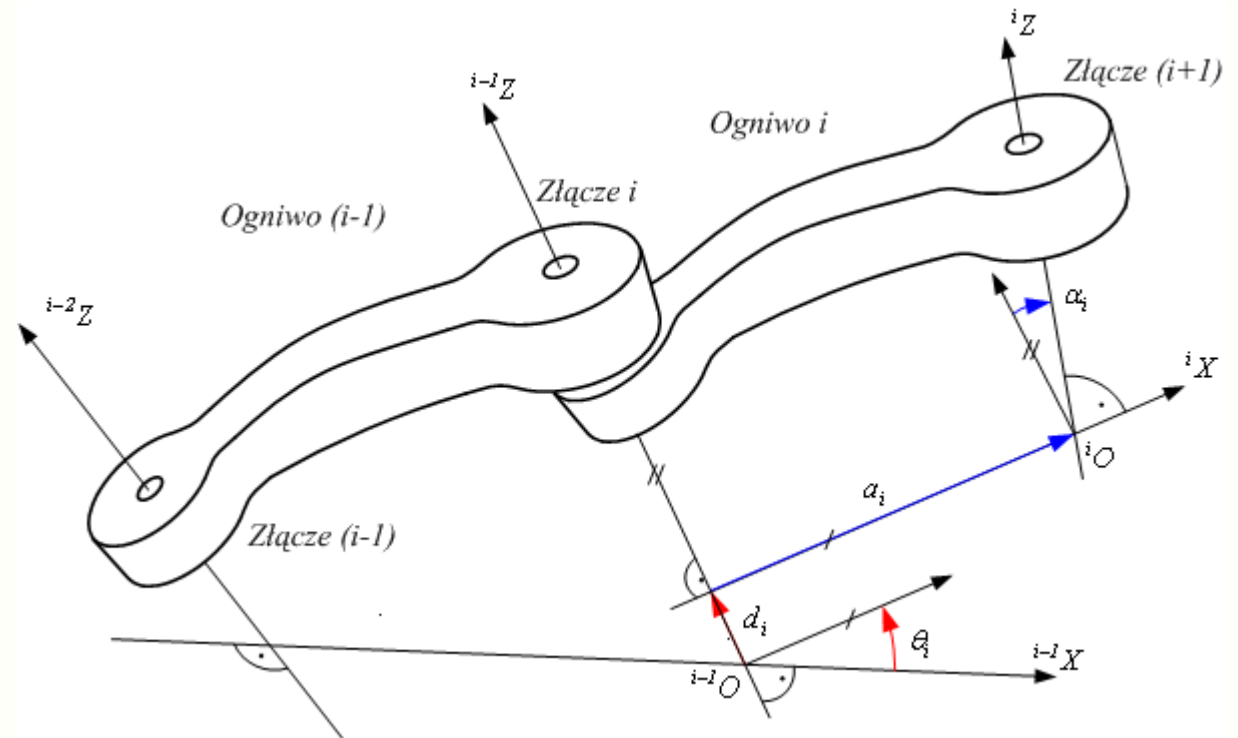
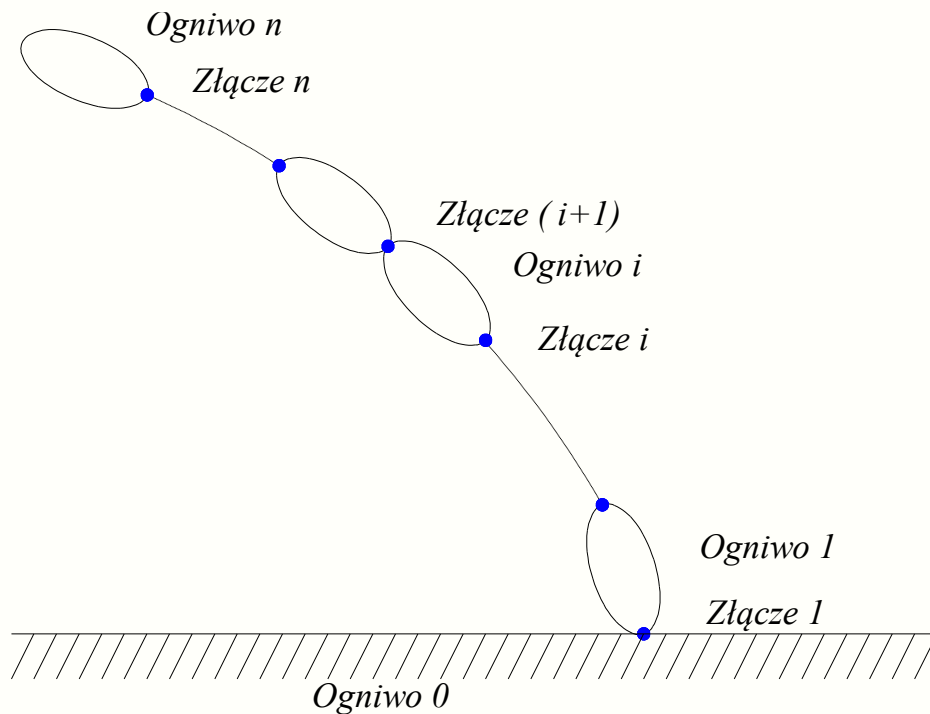
M. stawowy



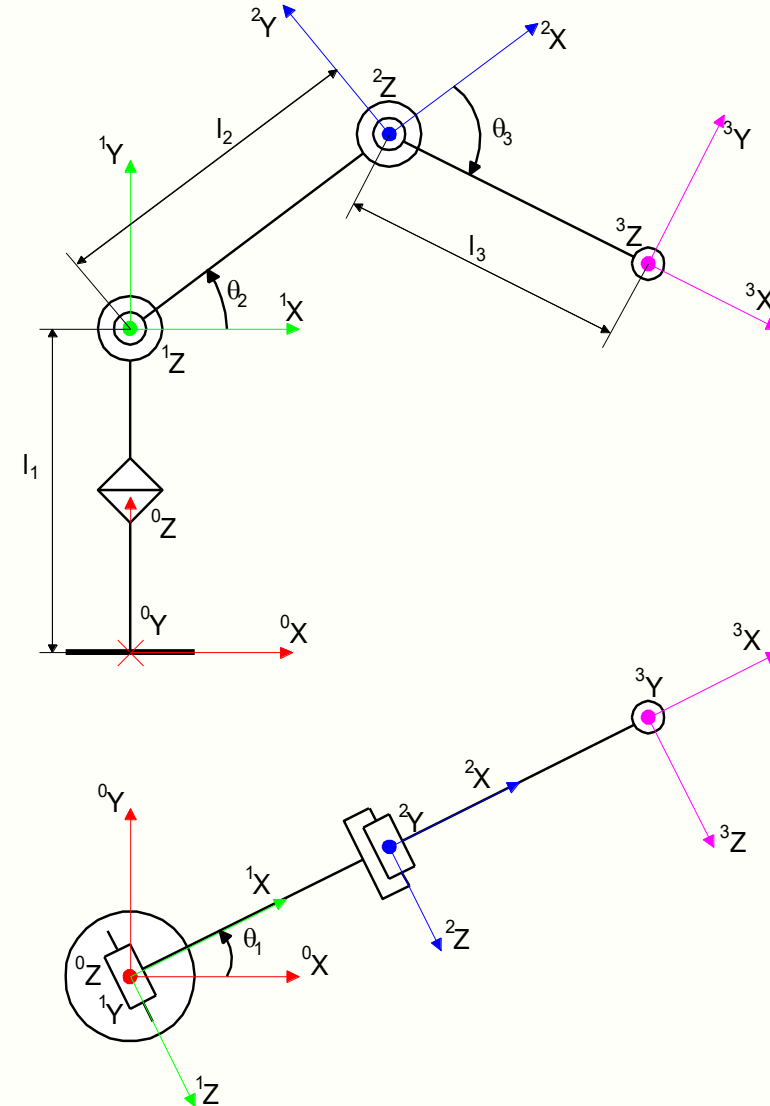
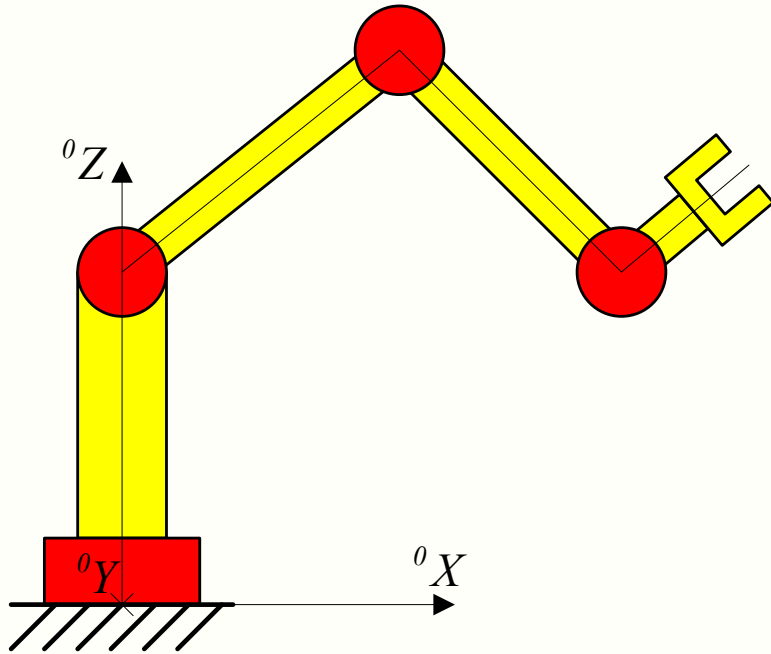
Delta

Kinematyka manipulatora

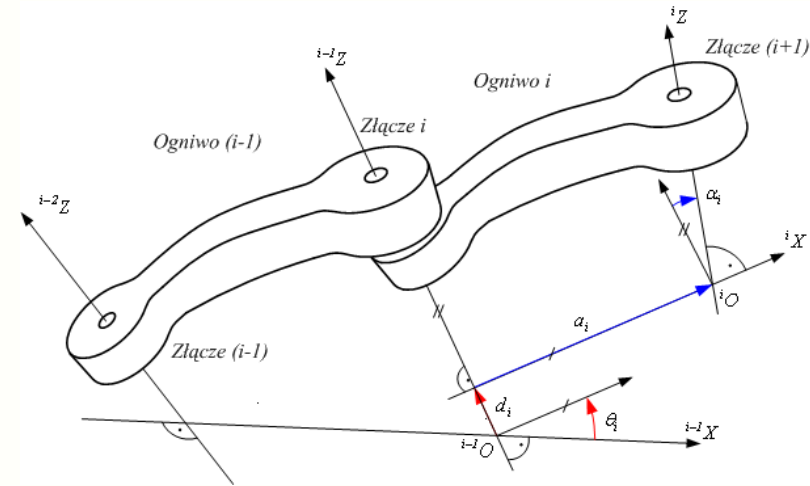
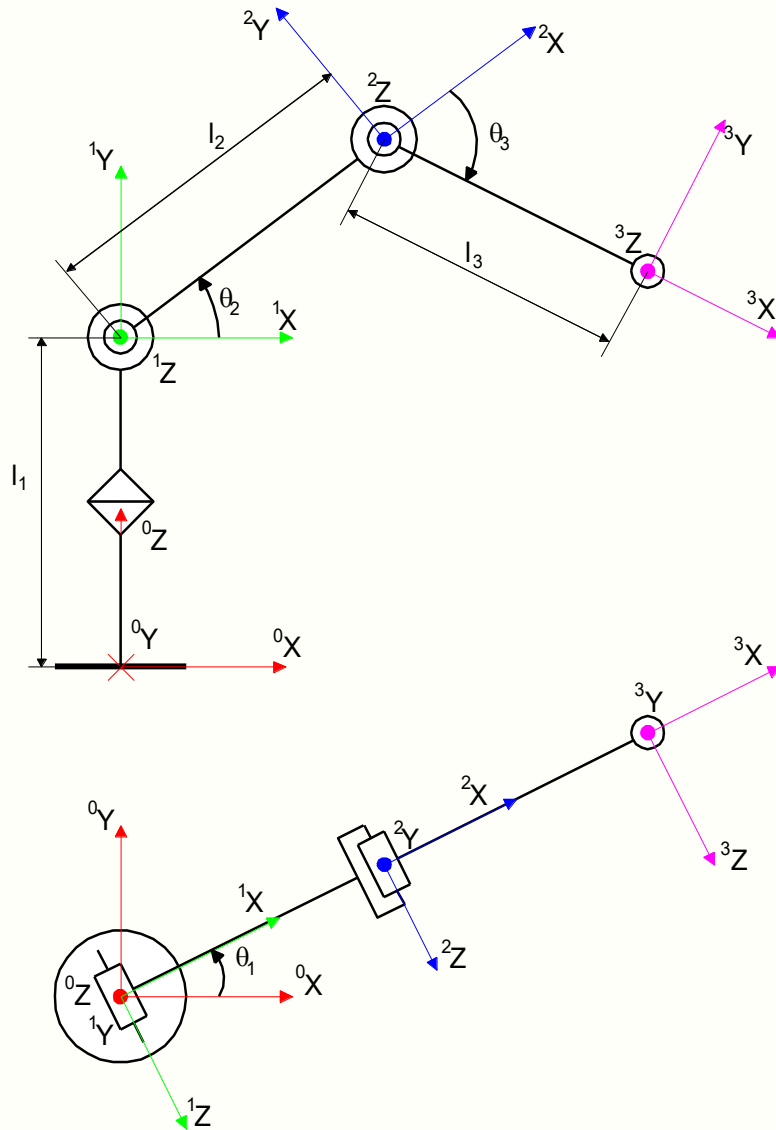
Z każdym ogniwem manipulatora, w tym z podstawą oraz efektem (chwytykiem, narzędziem), związany jest układ współrzędnych kartezjańskich. Kinematyka określa relacje pomiędzy tymi układami w funkcji obrotów i przesunięć w kolejnych złączach.



Przykład zastosowania notacji Denavita-Hartenberga



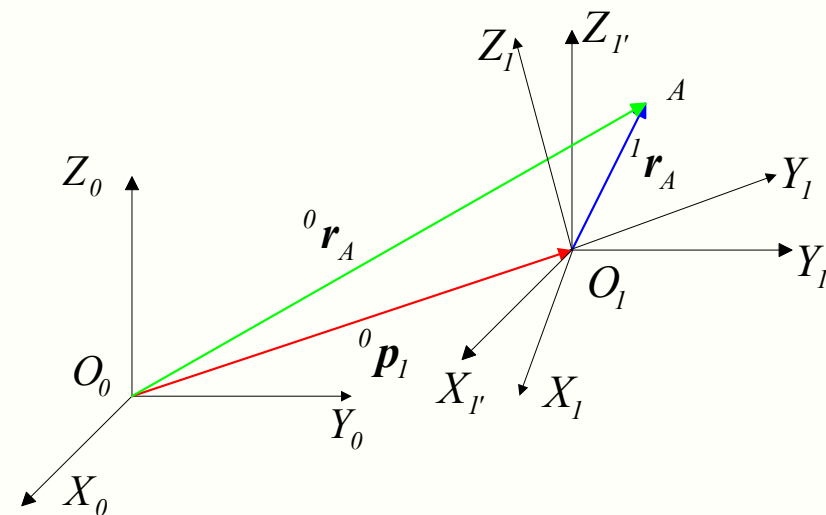
Przykład zastosowania notacji Denavita-Hartenberga



i	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\pi / 2$	l_1	θ_1
2	l_2	0	0	θ_2
3	l_3	0	0	θ_3

Relacje pomiędzy układami: $(i-1)$ oraz i

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Macierz jednorodna jest
funkcją *zmiennej złączowej*:

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & \text{- dla złącza obrotowego} \\ d_i & \text{- dla złącza przesuwne} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 & {}^0\mathbf{p}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{r}_A \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 & {}^0\mathbf{p}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Relacje pomiędzy dowolnymi układami

$${}^0\hat{\mathbf{r}} = A_1(q_1){}^1\hat{\mathbf{r}} \quad {}^1\hat{\mathbf{r}} = A_2(q_2){}^2\hat{\mathbf{r}} \quad \dots \quad {}^{n-1}\hat{\mathbf{r}} = A_n(q_n){}^n\hat{\mathbf{r}}$$

$${}^0\hat{\mathbf{r}} = A_1(q_1)A_2(q_2)\dots A_n(q_n){}^n\hat{\mathbf{r}} = {}^0\mathbf{H}_n{}^n\hat{\mathbf{r}}$$

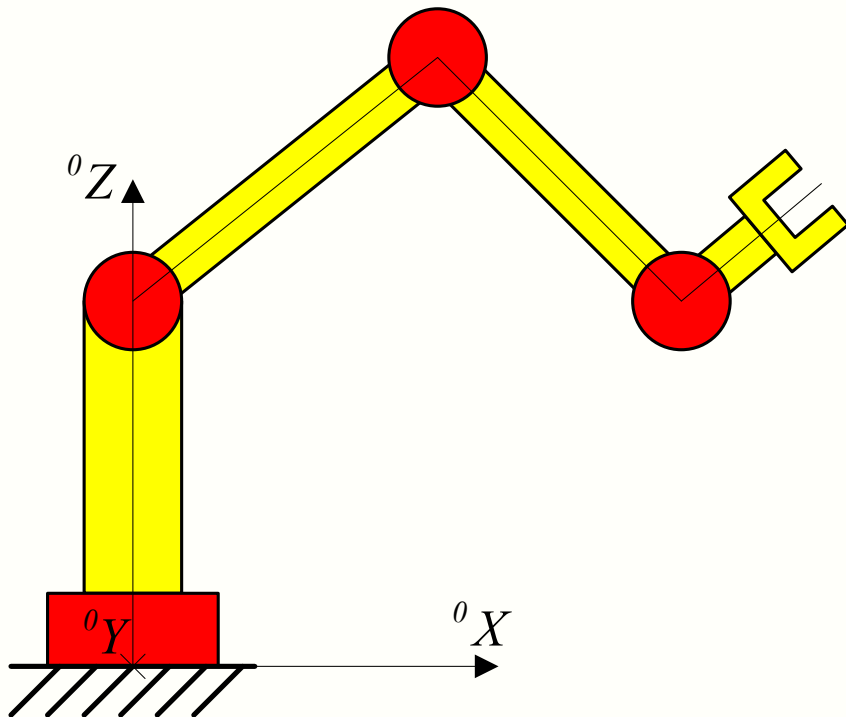
Złożona macierz jednorodna:

$${}^0\mathbf{H}_n = A_1(q_1)A_2(q_2)\dots A_n(q_n) = {}^0\mathbf{H}_n(q_1, q_2, \dots, q_n) = {}^0\mathbf{H}_n(\mathbf{q})$$

Wektor zmiennych złączowych:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T$$

Kinematyka manipulatora



$$\begin{bmatrix} {}^0r \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0H_3 \begin{bmatrix} \theta \\ 1 \end{bmatrix}$$

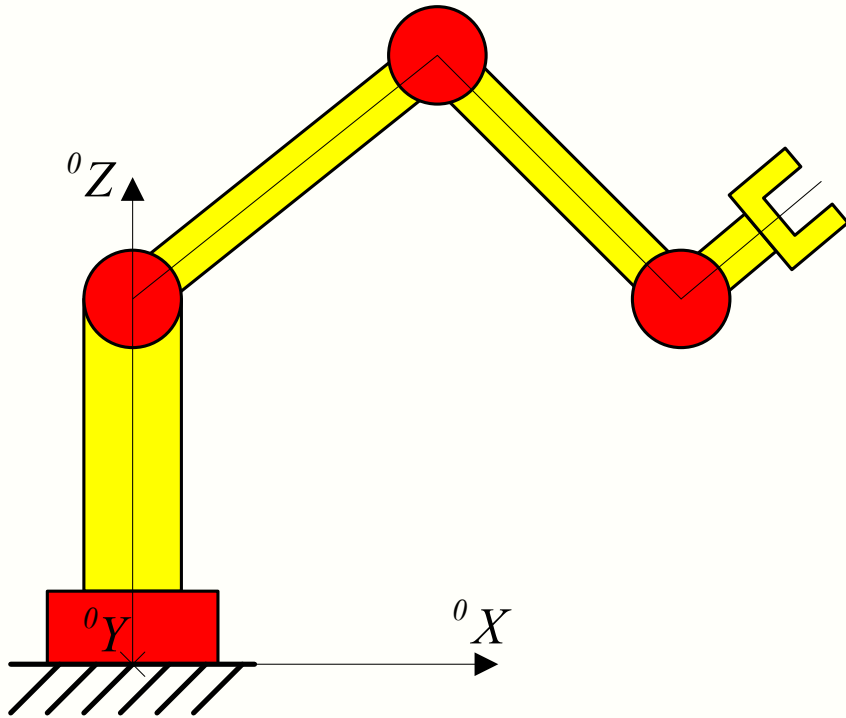
$$\begin{bmatrix} {}^0r_x \\ {}^0r_y \\ {}^0r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & (l_2 C_1 C_2 + l_3 C_1 C_{23}) \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & (l_2 S_1 C_2 + l_3 S_1 C_{23}) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & (l_1 + l_2 S_2 + l_3 S_{23}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0r_x = (l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \cos \theta_1$$

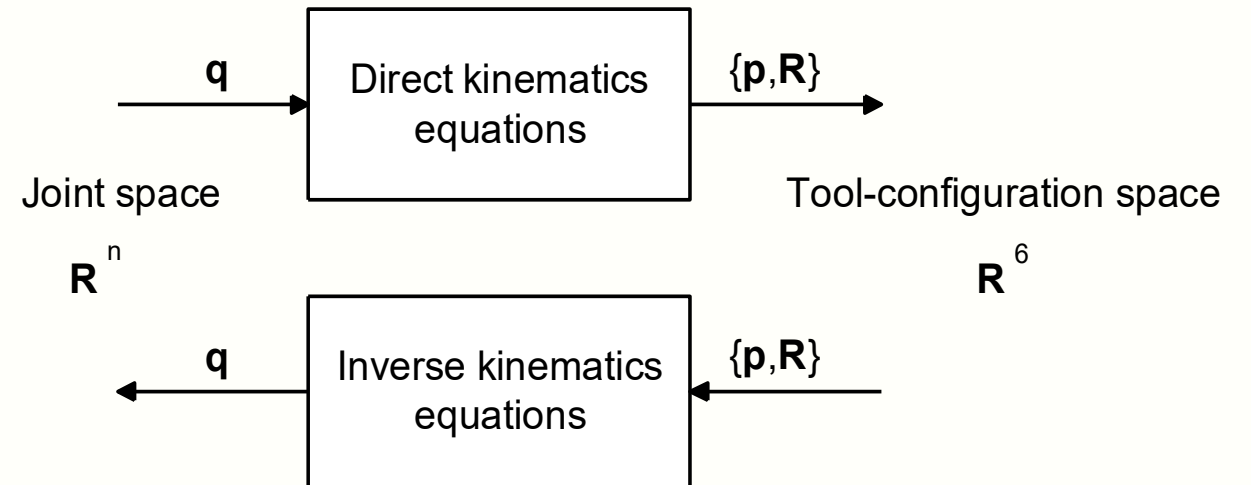
$${}^0r_y = (l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \sin \theta_1$$

$${}^0r_z = l_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)$$

Kinematyka manipulatora



Relacja jednoznaczna,
określona analitycznie



Relacja niejednoznaczna,
trudna do rozwiązania analitycznego,
metody numeryczne, optymalizacyjne

Kinematyka prędkości

Mapowanie przestrzeni zmiennych złączowych
na przestrzeń konfiguracyjną manipulatora
zapisane wektorowo
to układ 6 równań skalarnych:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$$

$$x_1 = f_1(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$$x_2 = f_2(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

...

$$x_6 = f_6(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

W ogólności wektory $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{q}(t)$ są funkcjami czasu i wówczas nazywamy je trajektoriami.
Funkcje te możemy zróżniczkować po zmiennych złączowych uzyskując zapis w postaci wektorowo-macierzowej.

$$dx_1 = \frac{\partial f_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial q_n} dq_n$$

$$dx_2 = \frac{\partial f_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial q_n} dq_n$$

...

$$dx_6 = \frac{\partial f_6}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_6}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial f_6}{\partial q_n} dq_n$$

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \dots \\ dx_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_6}{\partial q_1} & \frac{\partial f_6}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_6}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \dots \\ dq_n \end{bmatrix}$$

Kinematyka prędkości

Macierz pochodnych cząstkowych funkcji f względem q nazywa się macierzą Jakobiego lub Jakobianem manipulatora.

Jakobian mapuje chwilowe prędkości w przestrzeni złączowej na chwilowe prędkości w przestrzeni konfiguracyjnej manipulatora –

Proste zadanie kinematyki dla prędkości.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{J}(q) \frac{dq}{dt}$$

Przy czym lewa strona równania może być podzielona na prędkości liniowe i kątowe narzędzia:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}$$

Odwrotne zadanie kinematyki dla prędkości to mapowanie chwilowych prędkości narzędzia na chwilowe prędkości złączy manipulatora. Pod warunkiem, że $\mathbf{J}(q)$ jest macierzą nieosobliwą.

$$\frac{dq}{dt} = \mathbf{J}^{-1}(q) \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

$$\mathbf{J}(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial q_1} & \frac{\partial f_6}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_6}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

HEART

- *help educators to teach through robotic tools;*
- *focus on the supportive role of robots in adult education and inclusion of people with disabilities;*
- *searchable robots database - mapping the field of educational robotics and showing the interconnections between technologies and practices, relevant to the needs of adult learners, also learners with disabilities;*
- *web-based training course, consisting of 6 modules – with training for trainers and webinars;*



heartroboticsproject.eu



Raptors



raptors.p.lodz.pl

Działa od 2014

20+ aktywnych studentów

3-cie pokolenia

Roboty mobilne

Zawody robotów i międzynarodowe konkursy

[Raptors PL ERC 2025](#)

Baza dla działań komercyjnych

Startup Hetbot – hetbot.com





Politechnika Łódzka
Instytut Automatyki



Robotyka – matematyka i zabawa

granosik@p.lodz.pl