

Matematyka w sporcie

Michał Popławski

Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka

Tenis - Czy najlepszy zawodnik naprawdę jest taki dobry?



Tenis - Czy najlepszy zawodnik naprawdę jest taki dobry?

Novak Djokovic wygrywa 54% punktów, co przenosi się na 84% wygranych meczów. Jak to jest możliwe?

Na razie uproścmy sytuację i założmy, że zawodnik A wygrywa punkt w meczu z zawodnikiem B z prawdopodobieństwem p i przegrywa z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$ niezależnie od tego, który zawodnik serwuje.

Krok 1: prawdopodobieństwo wygrania gema przez zawodnika A :

- ❶ od stanu 40 – 0: p^4
- ❷ od stanu 40 – 15: $4 \cdot p^4 \cdot q$
- ❸ od stanu 40 – 30: $\binom{5}{2} \cdot p^4 \cdot q^2$

Tenis - Czy najlepszy zawodnik naprawdę jest taki dobry?

④ od stanu równowagi

$$40 - 40: \binom{6}{3} \cdot p^3 \cdot q^3 p^2 (1 + 2pq + (2pq)^2 + \dots + (2pq)^n + \dots) = \frac{20p^5q^3}{1-2pq}$$

Prawdopodobieństwo wygrania gema przez zawodnika A:

$p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2 + \frac{20p^5q^3}{1-2pq} = p^4(1 + 4q + 10q^2 + \frac{20pq^3}{1-2pq})$. Tak więc Djokovic wygrywa gema z prawdopodobieństwem: 59.9% (oficjalne statystyki wskazują na 59%).

Kolejne uproszczenie: założmy, że prawdopodobieństwo wygrania tie-breaka (do 7 lub 10 punktów z przewagą co najmniej 2 punktów) jest takie samo jak prawdopodobieństwo wygrania każdego innego gema. Niech $P, Q = 1 - P$ - prawdopodobieństwa wygrania seta przez zawodnika A, zawodnika B, odpowiednio.

Tenis - Czy najlepszy zawodnik naprawdę jest taki dobry?

Krok 2: prawdopodobieństwo wygrania seta przez zawodnika A:

❶ $6 - 0: P^6$

❷ $6 - 1: 6P^6Q$

❸ $6 - 2: \binom{7}{2}P^6Q^2$

❹ $6 - 3: \binom{8}{3}P^6Q^3$

❺ $6 - 4: \binom{9}{4}P^6Q^4$

❻ $7 - 5: \binom{10}{5}P^7Q^5$

❼ $7 - 6: \binom{10}{5}3P^7Q^6$

Tenis - Czy najlepszy zawodnik naprawdę jest taki dobry?

Sumując otrzymujemy prawdopodobieństwo wygrania seta przez zawodnika A:

$$P^6 + 6P^6Q + \binom{7}{2}P^6Q^2 + \binom{8}{3}P^6Q^3 \\ + \binom{9}{4}P^6Q^4 + \binom{10}{5}P^7Q^5 + \binom{10}{5}3P^7Q^6.$$

Wstawiając za P uzyskaną wartość w 1. Kroku, wnioskujemy że Novak Djokovic wygrywa 76% setów.

Założmy, że wszystkie mecze odbywają się w formacie do dwóch wygranych setów. Niech P' , Q' - prawdopodobieństwa wygrania seta przez zawodników A,B, odpowiednio.

Tenis - Czy najlepszy zawodnik naprawdę jest taki dobry?

Krok 3: prawdopodobieństwo wygrania meczu przez zawodnika A:

❶ $2 - 0 : (P')^2$

❷ $2 - 1 : 2(P')^2 Q'.$

Zatem zawodnik A wygrywa z prawdopodobieństwem $(P')^2 + 2(P')^2 Q'$. Wstawiając w miejsce P' wartość uzyskaną w poprzednim kroku, szacujemy że Djokovic wygrywa ok. 85.5% meczów.

Tenis - Jaki format gry jest najlepszy?

Przypuśćmy, że w meczu tenisowym chcemy rozegrać nieparzystą liczbę m punktów. Chcemy mecz podzielić na kawałki, nazwijmy je setami. (Nie ma już gemów.) Chcemy rozegrać n setów, w każdym ma być rozegrane k punktów, przy czym $nk = m$. (W szczególności n, k - nieparzyste.) Zawodnik A wygrywa punkt z prawdopodobieństwem $p > 0.5$. Na ile setów należy podzielić mecz, aby zawodnik A miał jak najmniejsze szanse na wygraną? Przy powyższych oznaczeniach

$$P := \mathbb{P}(A \text{ wygrywa seta}) = \sum_{i=\frac{k+1}{2}}^k \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}$$

oraz

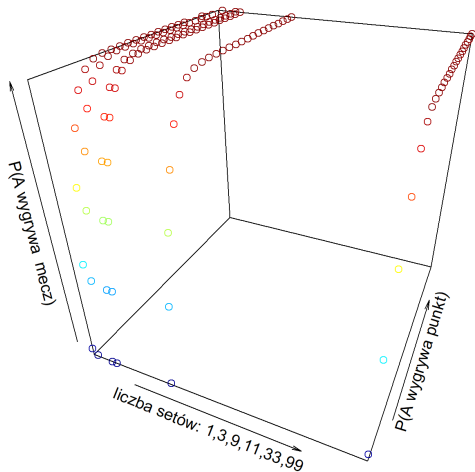
$$\mathbb{P}(A \text{ wygrywa mecz}) = \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^n \binom{n}{i} P^i (1-P)^{n-i}.$$

Tenis - Jaki format gry jest najlepszy?

Kod w R-studio, by uzyskać wykresy punktowe prawdopodobieństw dla $m = 99$ oraz $p = 0.51, 0.53, \dots, 0.99$:

```
wygrana<-function(n,p,m)  k<-m/n
P<-sum(dbinom(((k+1)/2):k,k,p))
return(sum(dbinom(((n+1)/2):n,n,P)))  m<-99
X<-c(1,3,9,11,33,99) P<-seq(0.51,0.99,0.02)
l<-length(X) X<-rep(X,times=length(P))
P<-rep(P,each=l) Z<-c() for(i in 1:length(X))
Z<-c(Z,wygrana(X[i],P[i],m))
plot3D::points3D(X,P,Z,xlab="liczba setów:
1,3,9,11,33,99",ylab="P(A wygrywa punkt)",zlab="P(A
wygrywa mecz)",theta=24,phi=30)
```

Tenis - Jaki format gry jest najlepszy?



Jak utrudnić dart?



Jak utrudnić dart?

Chcemy ułożyć liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots, 20\}$ na zewnątrz tarczy tak, aby suma różnic sąsiednich liczb była jak największa. Jak to zrobić? Niech $A = (a_1, a_2, \dots, a_{20})$ - permutacja zbioru $\{1, 2, \dots, 20\}$. Oznaczmy dodatkowo $a_{21} = a_1$. Niech
$$D(A) = \sum_{j=1}^{20} |a_{j+1} - a_j|.$$
 Szukamy $\max\{D(A) : A - \text{permutacja zbioru } \{1, 2, \dots, 20\}\}$. Powiemy, że A będzie permutacją typu (T), jeśli jest ona postaci $A = (m_1, M_1, m_2, M_2, \dots, m_{10}, M_{10})$ dla pewnych permutacji $m = (m_1, m_2, \dots, m_{10})$, $M = (M_1, M_2, \dots, M_{10})$ zbiorów $\{1, 2, \dots, 10\}$ oraz $\{11, 12, \dots, 20\}$, odpowiednio.

Jak utrudnić dart?

Zauważmy, że dla permutacji typu (T) dostajemy

$$\begin{aligned} D(A) &= (M_1 - m_1) + (M_1 - m_2) + (M_2 - m_2) + (M_2 - m_3) + \dots + \\ &+ (M_{10} - m_{10}) + (M_{10} - m_1) = 2(M_1 + M_2 + \dots + M_{10}) - 2(m_1 + \\ &+ m_2 + \dots + m_{10}) = 2(11 + 12 + \dots + 20) - 2(1 + 2 + \dots + 10) = 200. \end{aligned}$$

Rozważmy teraz dwie permutacje:

$$B = \dots M_1[M_2 \dots m_1]m_2 \dots$$

$$C = \dots M_1[m_1 \dots M_2]m_2 \dots,$$

przy czym bloki $[M_2 \dots m_1]$ oraz $[m_1 \dots M_2]$ składają się z tych samych liczb napisanych w odwrotnym porządku.

Jak utrudnić dart?

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} D(C) - D(B) &= |M_1 - m_1| + |M_2 - m_2| - (|M_1 - M_2| + |m_1 - m_2|) \\ &= M_1 - m_1 + M_2 - m_2 - |M_1 - M_2| - |m_1 - m_2| = (\star). \end{aligned}$$

Ponieważ wyrażenie $(\star)$ jest symetryczne ze względu na M_1, M_2 i podobnie, ze względu na m_1, m_2 , to możemy założyć

$M_1 > M_2, m_1 > m_2$. Wobec tego

$$(\star) = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 - M_1 + M_2 - m_1 + m_2 = 2(M_2 - m_1) > 0.$$

Oznacza to, że im więcej "przeskoków" z wartości ze zbioru $\{11, 12, \dots, 20\}$ do wartości ze zbioru $\{1, 2, \dots, 10\}$ i *vice versa* w ramach permutacji A , tym większa jest wartość $D(A)$. Tak więc, rozwiązaniem jest dow. permutacja typu (T) i szukane maksimum wynosi 200.

Dart - Czy warto odpuszczać bull's eye?



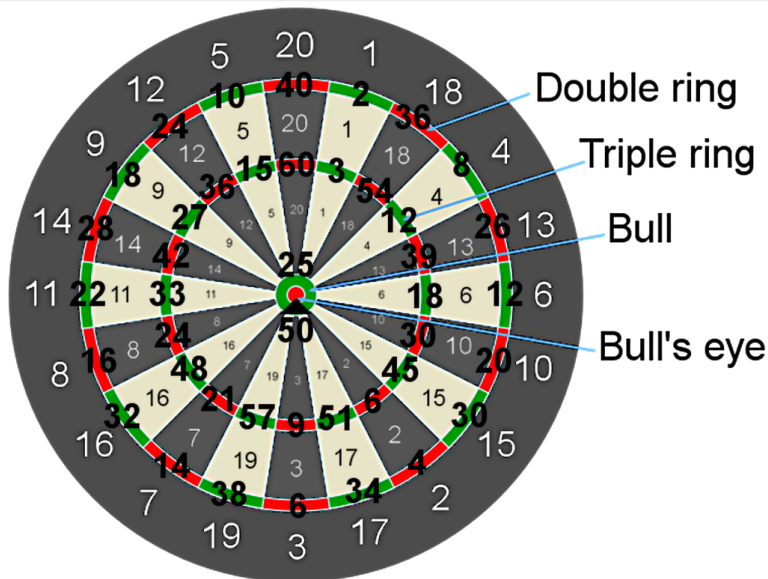
QUARTER-FINAL - BEST OF 19		LEGS	PTS
HETA	AUS	0	501
LITTLER	ENG	0	501
2024 UK OPEN		UWSPORT	

Dart - Czy warto odpuszczać bull's eye?

Zawodnicy oddają naprzemiennie po trzy rzuty. Lega (pojedynczą rozgrywkę - odpowiednik gema lub seta w tenisie) wygrywa pierwszy, który uzyska **dokładnie** 501 punktów, przy czym:

- 1 duże pola (białe i czarne) oraz zielony pierścień w środku to wartości pojedyncze - $1, 2, \dots, 20, 25$;
- 2 zewnętrzny pierścień (pola zielone i czerwone) oraz czerwony środek to wartości podwójne - $2, 4, \dots, 40, 50$;
- 3 wewnętrzny pierścień (pola zielone i czerwone) to wartości potrójne - $3, 6, \dots, 60$

Dart - Czy warto odpuszczać bull's eye?



Dart - Czy warto odpuszczać bull's eye?

Zawodnik kończąc lega musi trafić **wartość podwójną**. (Jeśli zawodnik w trakcie wykonywania danej kolejki przekroczy w sumie 501 punktów w legu, kolejka ta staje się nieważna - zawodnik dostaje za nią 0 punktów (nawet jeśli pierwsze dwa z trzech rzutów wykonał legalnie).)

Przypuśćmy, że zawodnikowi B zostało do końca 160 punktów. Zawodnik A jest w trakcie wykonywania swojej kolejki i po dwóch rzutach zostało mu 50 punktów do końca. Zatem powinien rzucać czerwony środek, aby dać sobie szansę wygranej w legu już w tym rzucie. Często jednak zawodnik A w takiej sytuacji ... odpuszcza i przeznaczając ten ostatni rzut na rozmianę, tj. trafienie pojedynczej wartości, aby następną kolejkę zacząć od swojej ulubionej podwójnej (zwykle zostawia sobie 40 lub 32 do końca).

Dart - Czy warto odpuszczać bull's eye?

Zawodnik B może zamknąć 160 np. tak: T20 (triple 20), T20, D20 (double 20). Oznaczmy więc przez t - prawdopodobieństwo trafienia wartości potrójnej przez gracza B oraz przez d_B - prawdopodobieństwo trafienia wartości podwójnej (innej niż czerwony środek) przez gracza B . Ponadto, niech b - prawdopodobieństwo trafienia czerwonego środka przez gracza A , d_A - prawdopodobieństwo trafienia wartości podwójnej (innej niż czerwony środek) przez gracza A .

Dart - Czy warto odpuszczać bull's eye?

Wówczas prawdopodobieństwo, że gracz A rezygnując z trafiania w czerwony środek wygra w pierwszej powrotnej kolejce wynosi:

$(1 - t^2 d_B) d_A$, podczas gdy prawdopodobieństwo wygranej w (najpóźniej) pierwszej powrotnej kolejce w przypadku próby trafienia czerwonego środka: $b + (1 - b)(1 - t^2 d_B) d_A^2$. Która z liczb $(1 - t^2 d_B) d_A$, $b + (1 - b)(1 - t^2 d_B) d_A^2$ jest większa? Bywa różnie.

Czy wzrost formy sportowej zaskakuje?



Czy wzrost formy sportowej zaskakuje?

Przypuśćmy, że kulomiot oddał cztery kolejne pchnięcia w zawodach: 20.73, 21.12, 21.21, 21.67. Na ile zaskakująca jest taka tendencja?

Niech x_1, x_2, x_3, x_4 - rzucane (losowane) wartości. Załóżmy, że są one od siebie niezależne. Mierzymy wyniki z dokład. do 1 cm, więc możemy uznać, że $\mathbb{P}(x_i = x_j) = 0$ dla dowolnych różnych $i, j = 1, \dots, 4$. Wówczas prawdziwe są równości

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x_1 < x_2 < x_3 < x_4) &= \mathbb{P}(x_1 < x_2 < x_4 < x_3) \\ &= \mathbb{P}(x_1 < x_3 < x_2 < x_4) = \dots = \mathbb{P}(x_4 < x_3 < x_2 < x_1) = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!}.\end{aligned}$$

Czy wzrost formy sportowej zaskakuje?

Zatem w konkursie, w którym 12 zawodników oddaje po 4 pchnięcia powinniśmy widzieć średnio 1 zawodnika, który ma tendencję wzrostową lub spadkową przez cały konkurs.