O sumowaniu ciągów skończonych

Jacek Rogowski

Instytut Matematyki
Politechniki Łódzkiej

11 marca 2025

Notacja

Załóżmy, że (a_k) jest ciągiem liczbowym zdefiniowanym dla $k \in \mathbb{N}$. Jeżeli n jest ustaloną liczbą naturalną, to sumę

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

będziemy zapisywać za pomocą symbolu

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Tak więc znany wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

można zapisać krócej w postaci

$$\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

Powyższą notację można rozszerzyć na przypadek sumy, w której pierwszym składnikiem nie jest a_1, lecz na przykład a_m, przy czym zakładamy, że $m \leqslant n$:

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

W szczególności, wprowadzona definicja implikuje, że

$$\sum_{k=m}^{m} a_k = a_m.$$

Podobnie, n może zostać zastąpione przez inną liczbę, np. $n+1$; wtedy

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n + a_{n+1}.$$

Na koniec zauważmy, że

$$\sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1} = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Problem

Dla danego ciągu $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i liczby naturalnej n wyznacz jawną postać sumy

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Ciąg $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad \in \mathbb{N}$$

będziemy nazywać **ciągiem sum częściowych** ciągu (a_k).

Omówienie wielu metod znajdowania jawnych postaci sum:

R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa 1998

Metoda zaburzania wymaga zapisania s_{n+1} na dwa sposoby.

Pierwszy jest oczywisty:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1},$$

a drugi polega na przedstaweniu s_{n+1} w postaci:

$$s_{n+1} = a_1 + f(n,\, s_n),$$

gdzie f jest pewną funkcją.

Po rozwiązaniu równania

$$s_n + a_{n+1} = a_1 + f(n,\, s_n)$$

z niewiadomą s_n otrzymujemy jawną postać sumy $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_n$.

Problem 0

Znajdź jawną postać sumy $s_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$, gdzie $q \neq 1$ jest ustaloną liczbą.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$s_{n+1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + q^n = s_n + q^n$$

oraz

$$s_{n+1} = 1 + q\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right) = \\ = 1 + q\sum_{k=}^{n} q^{k-1} = 1 + qs_n.$$

W takim razie

$$s_n + q^n = 1 + qs_n.$$

Rozwiązując to równanie względem s_n otrzymujemy

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Problem 1

Znajdź jawną postać sumy $s_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$s_{n+1} = s_n + (n+1)2^{n+1}$$

oraz

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k2^k = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} k2^k = 2 + 2\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^k$$

$$= 2 + 2s_n + 4 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 2s_n + 2^{n+2} - 2$$

W takim razie

$$s_n + (n+1)2^{n+1} = 2s_n + 2^{n+2} - 2.$$

Rozwiązując to równanie względem s_n otrzymujemy

$$s_n = (n-1)2^{n+1} + 2 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Problem 2

Znajdź jawną postać sumy $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$s_{n+1} = s_n + (n+1)^2,$$

a z drugiej strony

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 1 + \sum_{k=2}^{n+1} k^2 = 1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (k^2 + 2k + 1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 1 + s_n + 2\sum_{k=1}^{n} k + n. \end{aligned}$$

Stąd

$$s_n + (n+1)^2 = 1 + s_n + 2\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Wyraz s_n redukuje się po obu stronach równości, ale otrzymujemy wzór:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Wniosek: Metodę zaburzania zastosowana do sumy kwadratów kolejnych liczb naturalnych prowadzi do wzoru na sumę pierwszych potęg tych liczb.

Hipoteza: W celu znalezienia sumy $\sum_{k=1}^{n} k^2$ należy rozważyć sumę

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Istotnie, mamy bowiem:

$$t_{n+1} = t_n + (n+1)^3,$$

oraz

$$t_{n+1} = 1 + \sum_{k=2}^{n+1} k^3 = 1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$$

$$= 1 + t_n + 3s_n + \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

Stąd

$$(n+1)^3 = 1 + 3s_n + \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

W konsekwencji

$$s_n = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

Niech $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będą takimi dwoma ciągami, że

$$a_k = b_{k+1} - b_k \qquad \text{dla } k \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \ldots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1$$

Równość

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = b_{n+1} - b_1 \tag{1}$$

daje jedną z najbardziej efektywnych metod znajdowania jawnej postaci sumy $\sum_{k=1}^{n} a_k$ nazywaną metodą **sumowania różnic**.

Oczywiście zastosowanie tej metody wymaga znajomości ciągu (b_k), co może sprawiać pewien problem w przypadku niektórych ciągów (a_k).

Problem 0 (raz jeszcze)

Znajdź jawną postać sumy $s_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$, gdzie $q \neq 1$ jest ustaloną liczbą.

Zauważmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i $q \neq 1$ mamy:

$$q^k - q^{k-1} = (q-1)q^{k-1}$$

skąd wynika, że

$$q^{k-1} = \frac{q^k}{q-1} - \frac{q^{k-1}}{q-1}.$$

Przyjmując

$$b_k = \frac{q^{k-1}}{q-1} \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

otrzymujemy $q^{k-1} = b_{k+1} - b_k$, a stąd

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1 = \frac{q^n}{q-1} - \frac{q^0}{q-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Problem 3

Znajdź jawną postać sumy $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Dla każdej liczby naturalnej k mamy:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

można więc przyjąć we wzorze (1)

$$b_k = -\frac{1}{k}.$$

Wówczas

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = b_{n+1} - b_1 = -\frac{1}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1}.$$

Podobnie można wykazać ogólniejszy wzór:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+c)(k+1+c)} = \frac{n}{(1+c)(n+1+c)},$$

gdzie c jest dowolną liczbą, która nie jest liczbą całkowitą ujemną.

W tym przypadku należy przyjąć:

$$b_k = -\frac{1}{k+c} \qquad \text{dla } k \in \mathbb{N}.$$

Ciąg Fibonacciego

to ciąg $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zdefiniowany rekurencyjnie:

$$\begin{cases} F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Jego wyrazy są nazywane **liczbami Fibonacciego**.

Początkowymi wyrazami ciągu Fibonacciego są liczby

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144, \ldots$$

Problem 4

Znajdź jawną postać sumy $s_n = \sum_{k=1}^{n} F_k$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Z zależności rekurencyjnej

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{dla } n \geqslant 2$$

wynika natychmiast (po podstawieniu $n = k + 2$), że

$$F_k = F_{k+2} - F_{k+1}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

więc przyjmując $b_k = F_{k+1}$ dostajemy

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = b_{n+1} - b_1 = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

Problem 5

Znajdź jawną postać sumy $\sum_{k=1}^{n} F_k^2$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Zauważmy, że $F_k = F_{k+1} - F_{k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$. W konsekwencji

$$F_k^2 = (F_{k+1} - F_{k-1})F_k = F_{k+1}F_k - F_kF_{k-1},$$

więc przyjmując $b_k = F_kF_{k-1}$ otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_{n+1}F_n.$$