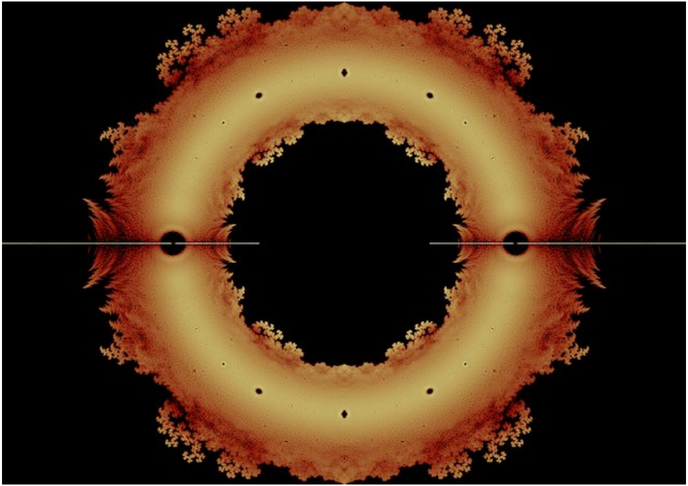
Dlaczego równania mają rozwiązania?

Wojciech Kryszewski

Politechnika Łódzka

Spotkania z Matematyką Stosowaną – 8.10.2024



Matematyka użyteczna jest piękna,

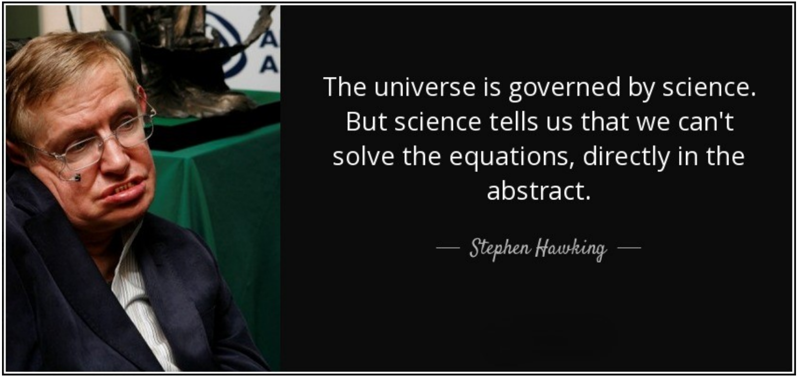
a piękna matematyka jest użyteczna...

Na rysunku widzimy pierwiastki (miejsca zerowe) wielomianów Littlewooda, tzn. wielomianów postaci

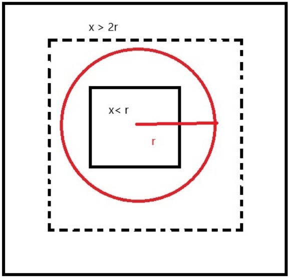
$$L(z) = \pm 1 \pm z \pm z^2 \pm z^3 \pm \ldots \pm z^n, \ z \in \mathbb{C},$$

czyli wielomianów, których współczynniki są równe 1 lub -1, a więc rozwiązania zespolone równania

$$L(z) = 0.$$



Wszechświatem rządzi nauka. Jednak nauka mówi nam, że nie możemy rozwiązywać równań bezpośrednio w abstrakcji.

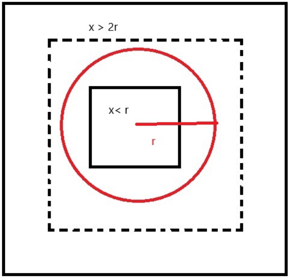


Kwadratura koła

Sonstruować x takie, aby pole kwadratu o boku x było równe polu koła o promieniu r.

Łatwo (?) znaleźć x: $x^2 = \pi r^2$, więc

$$x = r\sqrt{\pi}.$$

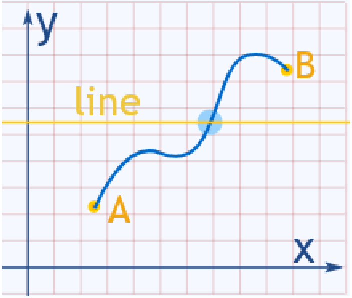


1. Dla $x > 2r$ pole kwadratu jest większe od pola koła.

2. Dla $x < r$ pole kwadratu jest mniejsze od pola koła.

Pole kwadratu zmienia się: jest mniejsze niż pole koła, a potem większe. A zatem...

Wniosek (Bryson 200 p.n.e): Znajdzie się $r < x < 2r$ dla którego pola kwadratu i koła są równe

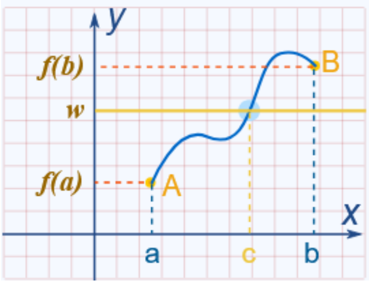


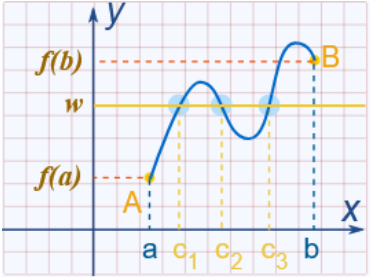
Przechodząc ścieżką z punktu A do punktu B musimy przeciąć linię

Czy rzeczywiście musimy?

TAK – pod warunkiem, że ścieżka jest ciągła.

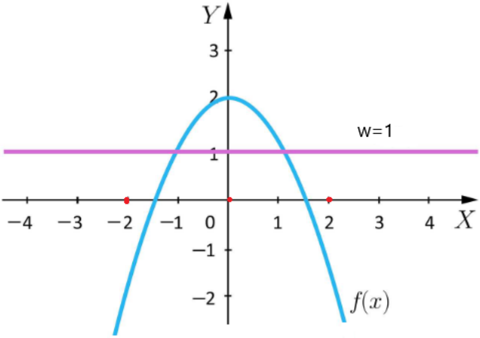
Równanie $f(x) = w$





Twierdzenie B. Bolzano (1812)

Mamy **ciągłą** funkcję $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i $f(a) < w < f(b)$. Wtedy istnieje taka liczba $x \in (a, b)$, że $f(x) = w$.



$f(x) = 2 - x^2$, $f(0) = 2 > w = 1$ oraz $w = 1 > f(2) = f(-2) = -2$.

Z twierdzenie Bolzano wynika, że w przedziałach $(-2,0)$ i $(0,2)$ znajdują się rozwiązania równania $f(x) = 1$.

Czy równania

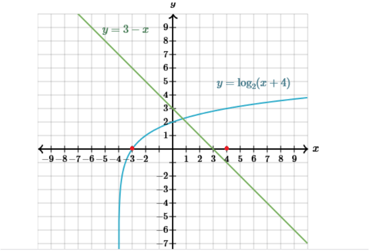
$$3-x=\log_2(x+4),\ 2^x-3=(x-6)^2-4$$

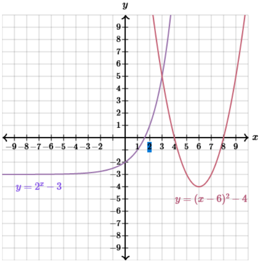
mają rozwiązanie?

Czy równania

$$3 - x = \log_2(x+4), \; 2^x - 3 = (x-6)^2 - 4$$

mają rozwiązanie?





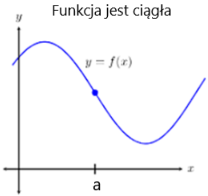
Oznaczamy $f(x) = log_2(x+4)$, $g(x) = 3 - x$. Mamy

$$f(-3) = 0 <= 6 = g(-3). \; f(4) = 3 > -1 = g(4).$$

Stąd istnieje rozwiązanie równania $3 - x = \log_2(x+4)$ leżące pomiędzy -3 i 4.

Żeby twierdzenie Bolzano „zadziałało”, to funkcja o której mowa powinna być **ciągła**.

Co to znaczy, że funkcja jest ciągła?



Ciągłość oznacza, że gdy x zbliża się do a, to wartości f(x) zbliżają się do f(a)

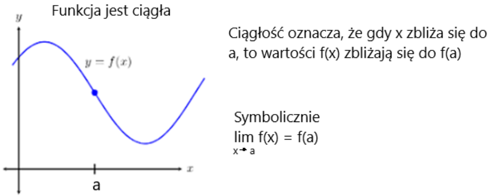
Symbolicznie

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Jej wykres można narysować „nie odrywając pisaka od kartki papieru”

Żeby twierdzenie Bolzano „zadziałało”, to funkcja o której mowa powinna być **ciągła**.

Co to znaczy, że funkcja jest ciągła?

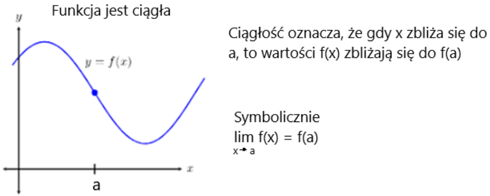


Jej wykres można narysować „nie odrywając pisaka od kartki papieru”

Ciągłość

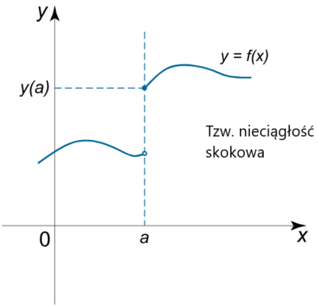
Żeby twierdzenie Bolzano „zadziałało”, to funkcja o której mowa powinna być **ciągła**.

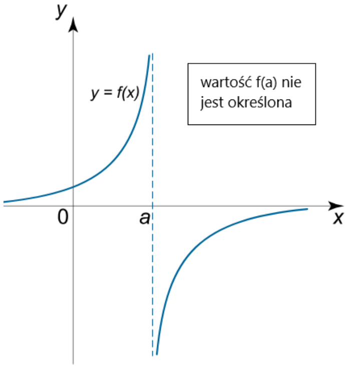
Co to znaczy, że funkcja jest ciągła?



Jej wykres można narysować „nie odrywając pisaka od kartki papieru”

Ta definicja nie jest „matematyczna”, co więcej: nie jest poprawna.





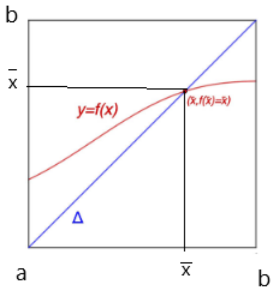
Bernard Bolzano

Bolzano, jako pierwszy zdefiniował ciągłość funkcji, co pozwoliło na w pełni ścisłe i precyzyjne zrozumienie tej własności funkcji i na udowodnienie ww. twierdzenia.

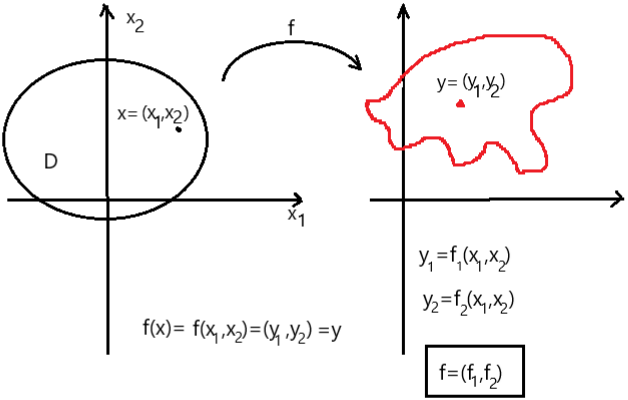
W dalszym ciągu będę mówić tylko o funkcjach ciągłych.

Równanie $f(x) = x$; punkty stałe funkcji

Dla funkcji $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, należy znaleźć **punkt stały**, tzn. taki $\bar{x}$, że $f(\bar{x}) = \bar{x}$.



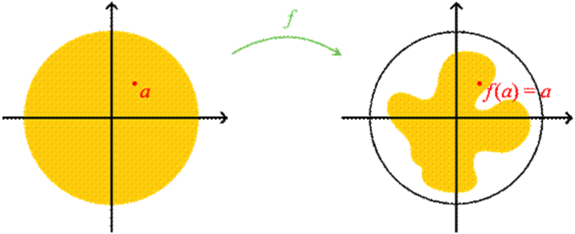
Widzimy, że $f(a) > a$, $f(b) < b$, wiec dla $g(x) = f(x) - x$ zachodzi $g(a) > 0$ i $g(b) < 0$, czyli istnieje $\bar{x}$, że $g(\bar{x}) = 0 \iff f(\bar{x}) = \bar{x}$.

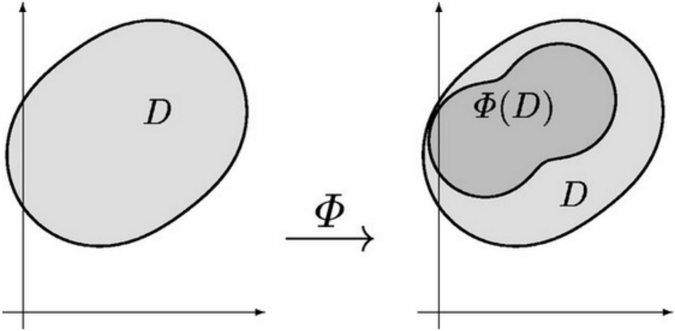


Niech $D \subset \mathbb{R}^2 := \{(x_1, x_2) : x_1, x_2\}$, $f = (f_1, f_2) : D \to \mathbb{R}^2$, gdzie $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$.

Niech $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant r\}$ (D jest **kołem** o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu r) i $f : D \to D$ funkcja ciągła. Wtedy istnieje takie $a \in D$, że $f(a) = a$.

L. Brouwer





Koło można zastąpić dowolnym zbiorem wypukłym, a płaszczyznę przestrzenią n-wymiarową.

Twierdzenie Brouwera wynika z ogólniejszego, lecz nieco tajemniczego twierdzenie Borsuka (tu w wersji Borsuka-Ulama)

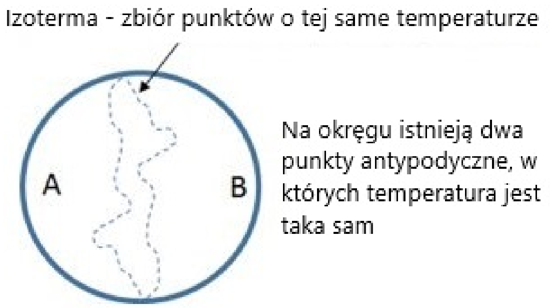
 

Karol Borsuk i Stanisław Ulam

Twierdzenie Borsuka-Ulama (1932)

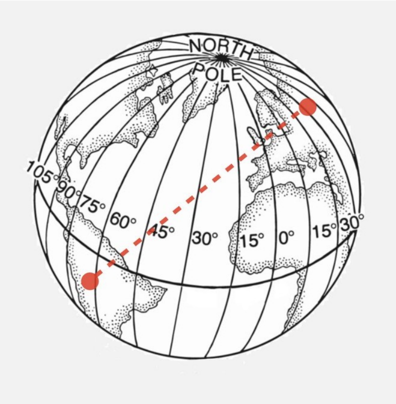
Niech $S=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$ (S jest okręgiem na płaszczyźnie) i $f: S\to\mathbb{R}$ funkcja ciągła. Wtedy istnieje taki $a\in S$, że $f(a)=f(-a)$.

Na dowolnej mapie narysujmy dowolny okrąg (mały lub duży) i każdemu punktowi na tym okresu przypiszmy temperaturę, która panuje w odpowiadającym mu punkcie na Ziemi. Wtedy znajdzie się taki punkt a na okręgu, w którym temperatura jest taka sama, jak w punkcie „antypodycznym".

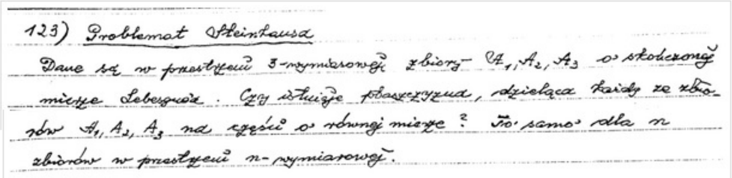


Twierdzenie Borsuka jest również prawdziwe dla wyższych wymiarów. W szczególności (dla wymiaru 2) wynika z niego następujący zabawny fakt:

Na powierzchni kuli ziemskiej istnieje para punktów antypodycznych, w których temperatura i ciśnienie są takie same.



Twierdzenie o kanapce z szynką

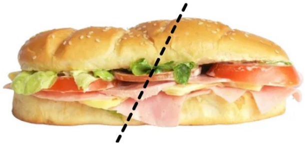

123) Problemat Steinhausa

Dane są w przestrzeni 3-wymiarowej zbiory A_1, A_2, A_3 o skończonej mierze Lebesgue'a. Czy istnieje płaszczyzna, dzieląca każdy ze zbiorów A_1, A_2, A_3 na części o równej mierze? To samo dla n zbiorów w przestrzeni n-wymiarowej.

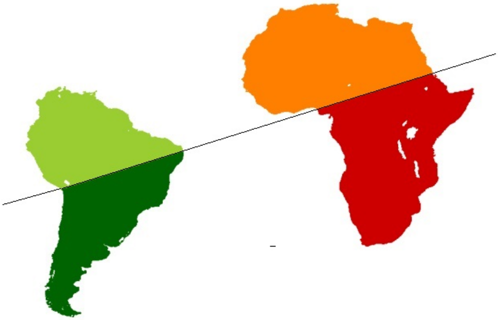
Problem nr 123. H. Steinhausa z Księgi Szkockiej

Dane są w przestrzewni 3-wymairowej zbiory A_1, A_2, A_3 o skonczonej mierze Lebesgue'a (czyli objętości). Czy istnieje płaszczyzna dzieląca każdy ze zbiorów A_1, A_2, A_3 na części o równej mierze (objętości)? To samo dla n zbiorów w przestrzeni n-wymiarowej.

Pozytwna odpowiedź: S. Banach poprzez redukcje do twierdzenie Borsuka-Ulama

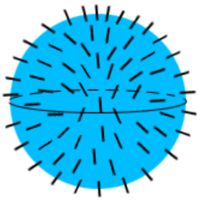


Można przekroić nożem kanapkę na dwie równe części (mające tyle samo szynki)

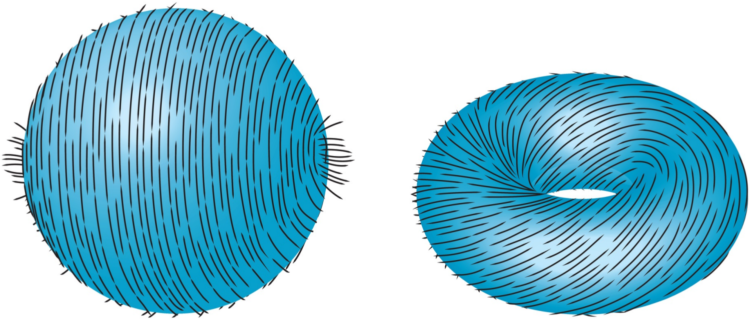


„Kanapka" w wersji 2-wymiarowej: znajdzie się prosta, która dzieli Amerykę Płd. i Afrykę na części o równych polach powierzchni

Przypuśćmy, że na sferze (powierzchni kuli w przestrzeni 3-wymiarowej) rosną włosy (matematycznie: dane jest pole wektorowe: w każdym punkcie zadany jest wektor). Czy można tę „fryzurę” uczesać, tzn. spowodować, aby każdy włos by styczny do sfery?

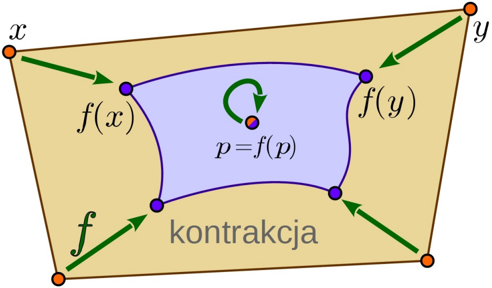


NIE! Zawsze powstanie „kogucik”; twierdzenie Poincaré-Hopfa



Ale torus (czyli bryłę o kształcie) opony można uczesać

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym (1922)

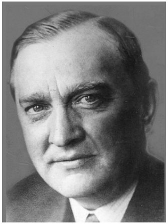


Jeśli (X,d) jest zupełną przestrzenią metryczną (np. zbiorem liczb rzeczywistych, odcinkiem, płaszczyzną, itp.), $f : X \to X$ **kontrakcją**, tzn. dla dowolnych $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \leqslant k d(x,y)$$

(tzn. odległość pomiędzy obrazami punktów jest mniejsza niż odległość między punktami), to f ma dokładnie jeden punkt stały.

Twierdzenie Banacha jest bardzo ogólne: rozmaite przestrzenie występujące w matematyce są przestrzeniami metrycznymi (można w nich określić pojęcie odległości) zupełnymi, ale założenie dotyczące „kontraktywności" jest dość silne, co czyni twierdzenie Banacha dość sztywnym w zastosowaniach.



Stefan Banach

Twierdzenie Poincaré-Mirandy; ponownie równanie $f(x) = 0$, ale w wyższych wymiarach

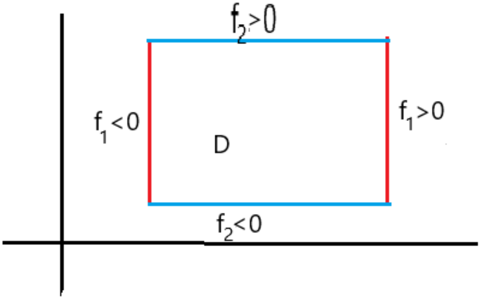
Twierdzenie Brouwera Borsuka są prawdziwe w wyższych wymiarach. A co z twierdzeniem Bolzano?

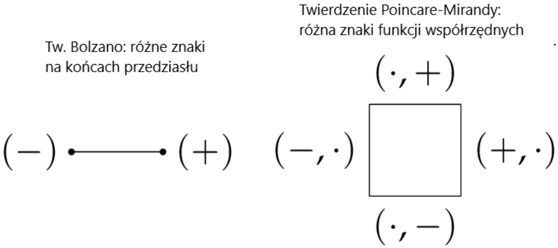

Henri Poincaré i Carlo Miranda

Rozważamy sytuację, w której:

- $f : D \to \mathbb{R}^2$, dziedzina D jest prostokątem;
- $f = (f_1, f_2)$ oraz

- funkcja f_1 przyjmuje wartości **ujemne** na lewym boku i **dodatnie** na prawym boku prostokąta;
- funkcja f_2 przyjmuje wartości **ujemne** na dolnym boku i **dodatnie** na górnym boku prostokąta.





Twierdzenie Poincaré-Mirandy (1864-1946)

W opisanej sytuacji istnieje taki punkt $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\in D$, że $f(\bar{x})=\bar{0}=(0,0)$, tzn.

$$f_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=0 \text{ oraz } f_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=0.$$

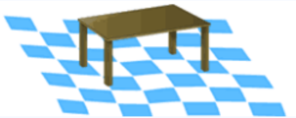
To tylko wierzchołek góry lodowej... W zasadzie historia omawianego tematu zaczyna się tutaj...

Dziękuję za uwagę

To tylko wierzchołek góry lodowej... W zasadzie historia omawianego tematu zaczyna się tutaj...

Dziękuję za uwagę

Zadanie 1



Twój stół się chwieje ... Co zrobić?

Po prostu obróć go aż
znajdziesz dobre położenie

Dlaczego jest to dobre rozwiązanie problemu ?

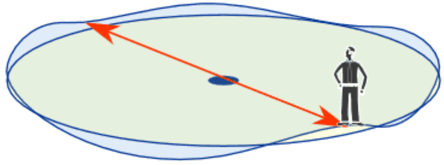
Zadanie 2

W pewnym momencie podczas okrężnej podróży znajdziesz się dokładnie na tej samej wysokości, co na początku. CZEMU?

O ile nie wystartujesz z najwyższego punktu

Zadanie 3

Jeśli podążasz po okrągłej ścieżce... gdzieś na tym okręgu znajdą się punkty, które będą: dokładnie naprzeciw siebie i na tej samej wysokości.



Dlaczego ?

Zadanie 4.

Niech $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą taką, że $f(0)=f(2)$. Pokazać, że wykres f ma cięciwę o długości 1.

Zadanie 5.

Przypuśćmy, że funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa o okresie $T>0$. Pokazać, że istnieje taki punkt $x_0\in\mathbb{R}$, że $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{T}{2}\right)$.

Zadanie 6.

Załóżmy, że funkcja $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ jest ciągła oraz $f(0)=f(2)$. Pokazać, że znajdą się takie punkty $x_1,x_2\in[0,2]$, że $x_2-x_1=1$ i $f(x_1)=f(x_2)$.

Zadanie 7.

Podać przykład funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która każdą swoją wartość przyjmuje dokładnie 3 razy. Czy istnieje funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która każdą swoją wartość przyjmuje dokładnie dwa razy?

Zadanie 8.

Przypuśćmy, że $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ spełnia $f(0)f(1) < 0$ oraz istnieje ciągła funkcja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ taka, że $f + g$ jest funkcją (ściśle) malejącą. Pokazać, że f ma miejsce zerowe.