Spotkania
z Matematyką Stosowaną

O modelowaniu ryzyka niewypłacalności zakładu ubezpieczeń

Marcin Rudź
(Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej)

Łódź, 14 V 2024

Wprowadzenie

Rozkłady prawdopodobieństwa odgrywają ważną rolę w modelach matematycznych opisujących zjawiska losowe.

Należy do nich następujący model ryzyka niewypłacalności zakładu ubezpieczeń opisujący wysokość majątku (nadwyżki) ubezpieczyciela S_n w kolejnych okresach n (przykładowo: miesiącach, kwartałach, ...).

Modelowanie ryzyka niewypłacalności zakładu ubezpieczeń

Nadwyżka ubezpieczyciela

$$S_n = S(n,u) = u + \gamma n - (X_1 + X_2 + \ldots + X_n),\ n \in \mathbb{N},$$

gdzie:
$u = S_0 \geqslant 0$ - początkowa nadwyżka ubezpieczyciela,
$\gamma > 0$ - składka za jeden okres,
$\mathbb{N}$ - zbiór dodatnich liczb całkowitych,
X_i - łączna wysokość szkód w i-tym okresie.

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ są nieujemnymi niezależnymi zmiennymi losowymi (określonymi na ustalonej przestrzeni probabilistycznej) o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa.

Modelowanie ryzyka niewypłacalności zakładu ubezpieczeń

Idea tak sformułowanego modelu nadwyżki ubezpieczyciela polega na równoważeniu ewentualnych wypłat przez zyski pochodzące z napływającej co okres odpowiednio wysokiej składki γ, przy założeniu o odpowiedniej wartości nadwyżki początkowej u.

Modelowanie ryzyka niewypłacalności zakładu ubezpieczeń

O technicznej ruinie ubezpieczyciela (w rozważanym modelu) mówimy, jeżeli wartość majątku ubezpieczyciela spadnie (po raz pierwszy) poniżej zera (o ile taka sytuacja ma miejsce).

Moment ruiny

$$\tau = \tau(u) = \inf\{n \in \mathbb{N} : S(n,u) < 0\}$$

przy umowie, że $\inf \emptyset = \infty$

$(\tau = \infty,\ $ gdy $\ S(n,u) \geqslant 0\ $ dla każdego $\ n \in \mathbb{N})$.

Moment ruiny cd.

$$\tau(u) = 1 \Leftrightarrow S(1,u) < 0 \Leftrightarrow u + \gamma - X_1 < 0 \Leftrightarrow X_1 > u + \gamma$$

$$\tau(u) > 1 \Leftrightarrow X_1 \leqslant u + \gamma$$

Przykładowa realizacja procesu ryzyka

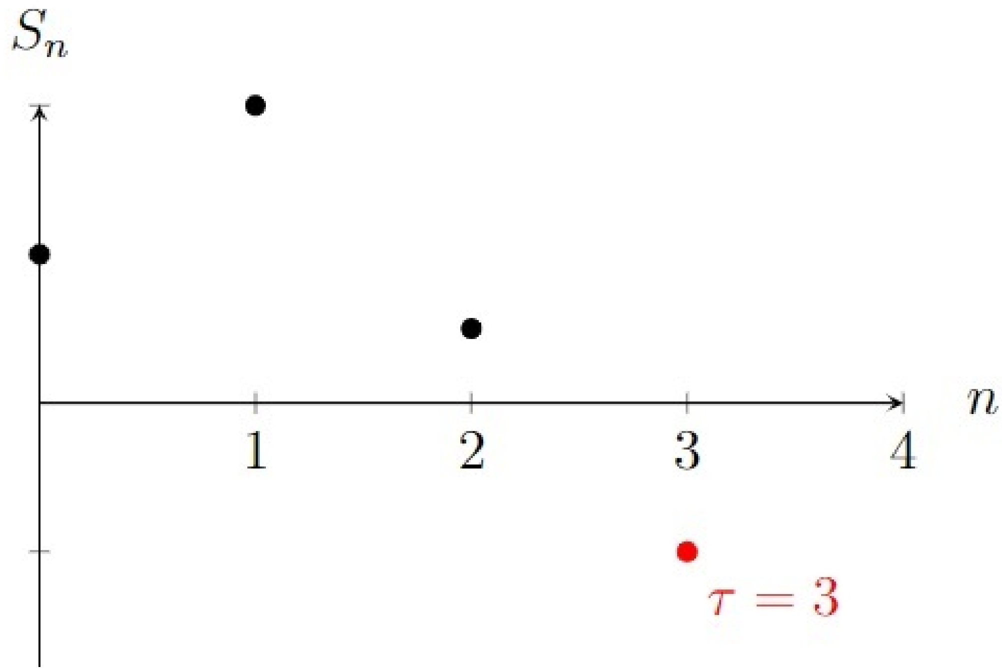
$$S(0,u) = u \geqslant 0,$$

$$S(1,u) = u + \gamma - X_1 > 0,$$

$$S(2,u) = u + 2\gamma - (X_1 + X_2) = u + \gamma - X_1 + \gamma - X_2 = S(1,u) + \gamma - X_2 > 0,$$

$$S(3,u) = u + 3\gamma - (X_1 + X_2 + X_3) = S(2,u) + \gamma - X_3 < 0.$$

Przykładowa realizacja procesu ryzyka



Prawdopodobieństwo - wprowadzenie

Dzięki technikom probabilistycznym jesteśmy w stanie obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń związanych z rozważanymi zmiennymi losowymi.

Strona główna

Strona tytułowa

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Prawdopodobieństwo - przykład

Rozważmy zmienną losową X typu dyskretnego, która przyjmuje wartości $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (są to tak zwane punkty skokowe albo atomy) z prawdopodobieństwami, odpowiednio, $p_1, p_2, p_3, \ldots$, które możemy wyrazić za pomocą funkcji prawdopodobieństwa $p_i = P(X = x_i)$, to znaczy p_i jest prawdopodobieństwem przyjęcia przez zmienną losową X wartości x_i.

Oczywiście, wszystkie prawdopodobieństwa p_i są nieujemne, a ich suma jest równa 1.

Prawdopodobieństwo - przykład cd.

Prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną losową X wartości z pewnego zbioru A (przykładowo: z ograniczonego albo nie przedziału) można wyrazić następująco:

$$P(X \in A) = \sum_{\{i:\, x_i \in A\}} p_i,$$

to znaczy sumujemy te prawdopodobieństwa, którym odpowiadają atomy należące do zbioru A (przy umowie, że powyższa suma jest równa 0 w przypadku braku takich atomów).

Prawdopodobieństwo - przykład cd.

Rozważmy trzypunktowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennnej losowej X o funkcji prawdopodobieństwa opisanej następująco:

$$P(X=1)=0.1,\quad P(X=2)=0.6,\quad P(X=5)=0.3.$$

Wówczas, przykładowo,

$P(X\in(1,2])=P(1<X\leqslant 2)=p_2=0.6,$

$P(X\in(1,2))=0,$

$P(X\in(-1,7])=p_1+p_2+p_3=1.$

Prawdopodobieństwo ruiny do końca n-tego okresu

$$\Psi_n(u) = P(\tau(u) \leqslant n)$$

Zadanie

(i) Załóżmy, że $\gamma \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz, że wszystkie szkody $X_1, X_2, \dots$ mają ten sam rozkład geometryczny o następującej funkcji prawdopodobieństwa:

$$\mathbb{P}(X_1 = n) = q^{n-1} \cdot p, \qquad n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie $p \in (0,1)$ oraz $q = 1 - p$. Wyznaczyć (w rozważanym modelu ryzyka) wzór na prawdopodobieństwo ruiny (niewypłacalności) ubezpieczyciela do końca pierwszego okresu jego działalności i doprowadzić ten wzór do możliwie najprostszej postaci zawierającej oznaczenia podane w punkcie (i).

Zadanie cd.

(ii) Załóżmy, że w rozważanym modelu ryzyka: okresem jest miesiąc z odpowiadającą mu składką $\gamma = 3$ oraz że $u = 1$. Obliczyć prawdopodobieństwo ruiny ubezpieczyciela do końca pierwszego miesiąca jego działalności w przypadku, gdy szkody mają rozkład geometryczny (z punktu (i)) z parametrem $p = 0.5$.