Zadanie do referatu "Wprowadzenie do procesów dyskretnych"

Ciąg Lucasa spełnia równanie rekurencyjne

$$L_{n+2} = L_{n+1} = L_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad L_0 = 2,\ L_1 = 1. \tag{1}$$

Liczby w ciągu Lucasa spełniają to samo równanie, co liczby w ciągu Fibonacciego - (F_n), $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, ale mają inny warunek początkowy.

Problemy do rozwiązania

(i) Wyznaczyć rozwiązanie równanie (1).

(ii) Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} =: \Phi \approx 1,618033988$, Φ nazywamy *złotym podziałem*.

Własności i zastosowania liczb Lucasa

Liczby w ciągu Lucasa począwszy od trzeciego wyrazu stanowią zaokrąglenia potęg liczby Φ:

$\Phi^0 = 1 = L_1$;

$\Phi^1 \approx 1,618033988 \approx 2 = L_0$;

$\Phi^2 \approx 2,618033988 \approx 3 = L_2$;

$\Phi^3 \approx 4,23607977 \approx 4 = L_3$;

$\Phi^4 \approx 6,854101954 \approx 7 = L_4 \ldots$.

Liczb Lucasa używa się do sprawdzania, czy dana liczba Mersenne'a jest liczbą pierwszą, a także w algorytmach szyfrujących.

Literatura

[1] S. Elaydi, An Introduction to Difference Equations, Third Edition, Springer, 2005.

[2] P. Rzechonek, Zaawansowane technologie Javy,
link https://ii.uni.wroc.pl/ prz/2019lato/java/zadania/zad9jsp.pdf