Wprowadzenie do procesów dyskretnych

Magdalena Nockowska-Rosiak

Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka

Spotkania z Matematyką Stosowaną, 09.04.2024

Równania rekurencyjne rzędu 1

W ekonomii, ale również w biologii, często chcemy przewidzieć stan w przyszłości gospodarki, firmy, grupy zwierząt bazując na obserwacjach aktualnego stanu gospodarki/firmy/grupy zwierząt. Co istotne w prezentowanym podejściu obserwacja (przewidywany stan) następuje w chwili $n = 0, 1, 2, \ldots$, gdzie czas liczymy w dniach, tygodniach, miesiącach, czy latach. W najprostszej sytuacji stan w momencie $n+1$ zależy od stanu gospodarki/firmy/grupy zwierząt w chwili n i relacja wyraża się równaniem rekurencyjnym rzędu 1 postaci:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Równania rekurencyjne rzędu 1

Wprowadźmy oznaczenia $\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych, przyjmując, że najmniejszą liczbą naturalną jest 1 oraz $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Zastanówmy się, jakie są minimalne założenia, aby równanie rekurencyjne rzędu 1

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

było poprawnie określone i miało rozwiązanie jednoznacznie określone?

Równania rekurencyjne rzędu 1

Wprowadźmy oznaczenia $\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych, przyjmując, że najmniejszą liczbą naturalną jest 1 oraz $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Zastanówmy się, jakie są minimalne założenia, aby równanie rekurencyjne rzędu 1

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

było poprawnie określone i miało rozwiązanie jednoznacznie określone?
Startując z punktu x_0 możemy wygenerować ciąg

$$x_0, \; f(x_0), \; f(f(x_0)), \; f(f(f(x_0))), \ldots$$

o ile $f(x_0)$ oraz złożenia $f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots$ mają sens.

Równania rekurencyjne rzędu 1

Wprowadźmy oznaczenia $\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych, przyjmując, że najmniejszą liczbą naturalną jest 1 oraz $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Zastanówmy się, jakie są minimalne założenia, aby równanie rekurencyjne rzędu 1

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

było poprawnie określone i miało rozwiązanie jednoznacznie określone?
Startując z punktu x_0 możemy wygenerować ciąg

$$x_0,\ f(x_0),\ f(f(x_0)),\ f(f(f(x_0))), \ldots$$

o ile $f(x_0)$ oraz złożenia $f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots$ mają sens.
Zakładając, że złożenia mają sens, to kładąc $f^2(x_0) := f(f(x_0))$, $f^3(x_0) := f(f^2(x_0))$, $f^{n+1}(x_0) := f(f^n(x_0))$ powyższe możemy zapisać

$$x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0).$$

Równania rekurencyjne rzędu 1

Niech X dowolny zbiór, $f : X \to X$, $x_0 \in X$, wówczas zagadnienie

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ x_0 \in X \end{cases}$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie postaci

Równania rekurencyjne rzędu 1

Niech X dowolny zbiór, $f : X \to X$, $x_0 \in X$, wówczas zagadnienie

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), & n \in \mathbb{N}_0 \\ x_0 \in X \end{cases}$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie postaci

$$x_n = f^n(x_0), \ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Niech X dowolny zbiór, $f : X \to X$, $x_0 \in X$, wówczas zagadnienie

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), & n \in \mathbb{N}_0 \\ x_0 \in X \end{cases}$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie postaci

$$x_n = f^n(x_0), \; n \in \mathbb{N}_0.$$

Zapamiętajmy, że aby równanie rekurencyjne rzędu 1 było poprawnie określone i miało jednoznaczne rozwiązanie, to musimy znać zależność $x_{n+1} = f(x_n)$, $f : X \to X$ oraz musimy znać punkt startu x_0.

Równania rekurencyjne, a równania różnicowe rzędu 1

Każde równanie rekurencyjne rzędu 1

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

można zapisać jako równanie różnicowe rzędu 1

$$\Delta x_n = g(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gdzie $\Delta x_n := x_{n+1} - x_n$ oraz $g(x) := f(x) - x$.
Równanie różnicowe można traktować jako dyskretyzację równania różniczkowego

$$x' = g(x).$$

Liniowe równania rekurencyjne rzędu 1

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ będą ciągami rzeczywistymi oraz $a_n \neq 0$, dla $n \in \mathbb{N}_0$.

Jednorodnym równaniem liniowym rekurencyjnym rzędu 1 nazywamy równanie postaci

$$x_{n+1} = a_n x_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Niejednorodnym równaniem liniowym rekurencyjnym rzędu 1 nazywamy równanie postaci

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Liniowe równania rekurencyjne rzędu 1

Jednoznacznym rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n x_n, & n \in \mathbb{N}_0 \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

jest

Jednoznacznym rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n x_n, & n \in \mathbb{N}_0 \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

jest

Istotnie, zauważmy, że

$$x_1 = a_0 x_0, \quad x_2 = a_1 x_1 = a_1 a_0 x_0, \quad x_n = a_{n-1} x_{n-1} = a_{n-1} a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_0 x_0.$$

Jednoznacznym rozwiązaniem zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n x_n, & n \in \mathbb{N}_0 \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

jest

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) x_0.$$

Istotnie, zauważmy, że

$$x_1 = a_0 x_0, \quad x_2 = a_1 x_1 = a_1 a_0 x_0, \quad x_n = a_{n-1} x_{n-1} = a_{n-1} a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_0 x_0.$$

Liniowe równania rekurencyjne rzędu 1 o stałych współczynnikach

Niejednorodnym równaniem liniowym rekurencyjnym rzędu 1 o stałych współczynnikach nazywamy równanie postaci

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
Wszystkie rozwiązania powyższego równania tworzą jednoparametryczną rodzinę postaci

$$x_n = c \cdot a^n + b\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}\right), \quad \text{gdy } a \neq 1$$

lub

$$x_n = c + bn, \quad \text{gdy } a = 1,$$

gdzie c jest dowolną stałą rzeczywistą.

Przykład 1

Lek jest podawany raz na cztery godziny. Niech $D(n)$ oznacza ilość leku w krwi na początku n-tego przedziału. Organizm usuwa 25% leku w ciągu każdego przedziału. Zakładając, że zawsze podajemy 2 jednostki leku wyznaczyć $D(n)$ oraz $\lim_{n\to\infty} D(n)$.

Na początku budujemy równanie rekurencyjne. Ilość leku w organizmie na początku okresu $n+1$ jest równa sumie nowej dawki leku 2 oraz tego co zostało z poprzedniego okresu, czyli $0,75D(n)$ stąd dostajemy równanie

$$D(n+1) = 0,75D(n) + 2.$$

Stąd rozwiązaniem powyższego jest

$$D(n) = c(0,75)^n + 2\left(\frac{(0,75)^n - 1}{(0,75) - 1}\right) = c(0,75)^n + 8(1-(0,75)^n), \; n \in \mathbb{N}_0.$$

Lek jest podawany raz na cztery godziny. Niech $D(n)$ oznacza ilość leku w krwi na początku n-tego przedziału. Organizm usuwa 25% leku w ciągu każdego przedziału. Zakładając, że zawsze podajemy 2 jednostki leku wyznaczyć $D(n)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} D(n)$.

$$D(n+1) = 0,75D(n) + 2$$

Stąd rozwiązaniem powyższego jest

$$D(n) = c(0,75)^n + 2\left(\frac{(0,75)^n - 1}{(0,75) - 1}\right) = c(0,75)^n + 8(1-(0,75)^n),\ \ n \in \mathbb{N}_0$$

oczywiście $D(0) = 2$, stąd $c = 2$ oraz

$$D(n) = 2(0,75)^n + 8(1-(0,75)^n) = 8 - 6(0,75)^n,\ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Przykład 1

Lek jest podawany raz na cztery godziny. Niech $D(n)$ oznacza ilość leku w krwi na początku n-tego przedziału. Organizm usuwa 25% leku w ciągu każdego przedziału. Zakładając, że zawsze podajemy 2 jednostki leku wyznaczyć $D(n)$ oraz $\lim_{n\to\infty} D(n)$.
Stąd rozwiązaniem powyższego jest

$$D(n) = 8 - 6(0,75)^n, \ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Wówczas $\lim_{n\to\infty} D(n) = 8$.
Wyznaczmy $D(n)$ dla $0 \leq n \leq 10$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D(n)$	2	3,5	4,62	5,47	6,1	6,58	6,93	7,2	7,4	7,55	7,66

Przykład 2

Mamy parę królików w zamkniętym pomieszczeniu, z którego nie mogą się wydostać. Ile będzie par królików po roku, jeżeli – po pierwsze – każda para rodzi nową parę w ciągu miesiąca, a ta nowa para staje się zdolna do rozrodu w następnym miesiącu, po drugie – króliki nie umierają, a po trzecie - króliki mają odpowiednią liczbę jedzenia. Rozwiązanie tego zagadnienia spełnia zależność rekurencyjną

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \ F(0) = 1, \ F(1) = 2, \ 0 \leq n \leq 10.$$

Powyższa skończona rekurencja wiąże z ciągiem Fibonacciego, który jest wyznaczony zależnością rekurencyjną

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \ F(0) = 0, \ F(1) = 1, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Jednorodne liniowe równania rekurencyjne rzędu 2 o stałych współczynnikach

Zauważmy, że ciąg Fibonacciego jest przykładem rekurencji jednorodnej liniowej rzędu drugiego o stałych współczynnikach, której ogólna postać jest dana wzorem

$$x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_2 x_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, $p_2 \neq 0$. Na razie pominiemy warunki początkowe tej rekurencji. Chcemy wyznaczyć wszystkie rozwiązania powyższej rekurencji. Zakładamy, że rozwiązanie powyższej rekurencji jest postaci

$$x_n = \lambda^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Stąd dostajemy równanie

$$\lambda^{n+2} + p_1 \lambda^{n+1} + p_2 \lambda^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Oczywistym, że rekurencję spełnia $x_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Chcemy szukać rozwiązań nietrywialnych, czyli zakładamy, że $\lambda \neq 0$. Dzieląc przez λ^n z powyższego dostajemy równanie kwadratowe

$$\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0,$$

które rozwiązujemy w dziedzinie zespolonej !!! (co oznacza, że posiada zawsze dwa rozwiązania, niekoniecznie różne).

Przykład 2 ciąg Fibonacciego

Wyznaczmy wszystkie rozwiązania

$$F(n+2) - F(n+1) - F(n) = 0, \;\; n \in \mathbb{N}_0.$$

Zatem rozwiązujemy równanie kwadratowe

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

które ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Zatem wszystkie rozwiązania rozważanej rekurencji są postaci

$$F(n) = a_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie a_1, a_2 to stałe rzeczywiste.

Przykład 2 ciąg Fibonacciego

Teraz wyznaczymy rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$F(n+2) - F(n+1) - F(n) = 0, \; F(0) = 0, \; F(1) = 1, \; n \in \mathbb{N}_0.$$

W rozwiązaniu ogólnym wyznaczamy a_1, a_2

$$F(n) = a_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + a_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

z warunków $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, co prowadzi nas do układu równań

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) + a_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases} .$$

Przykład 2 ciąg Fibonacciego

Zatem rozwiązaniem

$$F(n+2) - F(n+1) - F(n) = 0, \; F(0) = 0, \; F(1) = 1, \; n \in \mathbb{N}_0.$$

jest

$$F(n) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Przykład 2

Mamy parę królików w zamkniętym pomieszczeniu, z którego nie mogą się wydostać. Ile będzie par królików po roku, jeżeli – po pierwsze – każda para rodzi nową parę w ciągu miesiąca, a ta nowa para staje się zdolna do rozrodu w następnym miesiącu, po drugie – króliki nie umierają, a po trzecie - króliki mają odpowiednią liczbę jedzenia. Rozwiązanie tego zagadnienia spełnia zależność rekurencyjną

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \; F(0) = 1, \; F(1) = 2, \; n \in \mathbb{N}_0,$$

której jedynym rozwiązaniem jest ciąg

$$F(n) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

oraz rozwiązaniem naszego problemu jest

$$F(12) = 337.$$

Jednorodne liniowe równania rekurencyjne rzędu 2 o stałych współczynnikach $x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_2 x_n = 0$, $p_2 \neq 0$

Rozwiązujemy równanie

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0.$$

Połóżmy $\Delta = p_1^2 - 4p_2$.
Jeżeli $\Delta > 0$, to powyższe równanie kwadratowe ma dwa różne niezerowe pierwiastki rzeczywiste λ_1, λ_2 oraz wszystkie rozwiązania

$$x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_2 x_n = 0, \quad p_2 \neq 0$$

są postaci

$$x_n = a_1(\lambda_1)^n + a_2(\lambda_2)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie a_1, a_2 są stałymi rzeczywistymi.

Jednorodne liniowe równania rekurencyjne rzędu 2 o stałych współczynnikach $x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_2 x_n = 0$, $p_2 \neq 0$

Rozwiązujemy równanie

$$\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0.$$

Połóżmy $\Delta = p_1^2 - 4p_2$.
Jeżeli $\Delta = 0$, to powyższe równanie kwadratowe ma jeden niezerowy pierwiastek (podwójny), który jest liczbą rzeczywistą λ_0 oraz wszystkie rozwiązania

$$x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_2 x_n = 0, \quad p_2 \neq 0$$

są postaci

$$x_n = a_1(\lambda_0)^n + a_2 n(\lambda_0)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie a_1, a_2 są stałymi rzeczywistymi.

Jednorodne liniowe równania rekurencyjne rzędu 2 o stałych współczynnikach $x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_2 x_n = 0$, $p_2 \neq 0$

Rozwiązujemy równanie

$$\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0.$$

Położmy $\Delta = p_1^2 - 4p_2$.
Jeżeli $\Delta < 0$, to powyższe równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki zespolone $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ oraz wszystkie rozwiązania

$$x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_2 x_n = 0, \quad p_2 \neq 0$$

są postaci

$$x_n = a_1(\alpha + i\beta)^n + a_2(\alpha - i\beta)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie a_1, a_2 są stałymi rzeczywistymi. Istnieją takie liczby rzeczywiste r, θ, że $\alpha + i\beta = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, wówczas

$$x_n = r^n \left(a_1 \cos(n\theta) + a_2 \sin(n\theta)\right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gdzie a_1, a_2 są stałymi rzeczywistymi.

Nieliniowe rekurencje rzędu 1

Na koniec rozważmy przykład nieliniowej rekurencji rzędu 1 dla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = x^2 - 2$, czyli równanie postaci

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (x_{n+1} = x_n^2 - 2), \; n \in \mathbb{N}_0.$$

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem startu wypiszemy kilka początkowych elementów ciągu generowanego tą rekurencją

$$x_0, \quad x_0^2 - 2, \quad (x_0^2 - 2)^2 - 2, \quad ((x_0^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2, \ldots$$

Jak widać tutaj nie jest łatwo podać wzór ogólny (x_n). Aby badać zachowanie takiej rekurencji wyznaczamy na początek jej punkty stałe, czyli rozwiązania równania

$$f(x) = x.$$

Przykład $x_{n+1} = x_n^2 - 2$

Dla rekurencji związanej z funkcją $f(x) = x^2 - 2$ punktami stałymi są rozwiązania (rzeczywiste)

$$x^2 - 2 = x,$$

czyli -1,2. Punkty stałe rekurencji generują ciągi stałe

$$x_0 = 2: \; 2, 2, 2, 2 \ldots; \qquad x_0 = -1: \; -1, -1, -1, -1 \ldots.$$

Weźmy kilka innych punktów startu:

$$x_0 = 0: \; 0, -2, 2, 2, 2, \ldots$$
$$x_0 = 1: \; 1, -1, -1, -1, \ldots$$
$$x_0 = \frac{3}{2}: \; \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{449}{256}, 1\frac{49993}{65536}, -\frac{3615594751}{4294967296}, \; \ldots$$
$$x_0 = 2,1: \; 2,1; \; 2,41; \; 3,8081; \; 12,50162561; \; 154,2906428926078721; \; \ldots$$

Nieliniowe rekurencje rzędu 1

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rozważamy równanie rekurencyjne rzędu 1

$$x_{n+1} = f(x_n), \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna oraz f' jest funkcją ciągłą, $f(x^\star) = x^\star$, $|f'(x^\star)| \neq 1$, to zachowanie rekurencji $x_{n+1} = f(x_n)$ z punktami startu blisko $x^\star$ są równoważne z zachowaniem jednorodnej liniowej rekurencji

$$y_{n+1} = f'(x^\star) y_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

S. Elaydi, An Introduction to Difference Equations, Third Edition, Springer, 2005.

Dziękuję za uwagę