Problem Monty'ego Halla i inne zaskakujące paradoksy rachunku prawdopodobieństwa

Filip Strobin

Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

filip.strobin@p.lodz.pl

Spotkania z Matematyką, 16.01.2024

Intuicja....

Rzucamy monetą, i po pewnym czasie pojawia się seria 10 Reszek!

Co **raczej** wypadnie następne?

Intuicja....

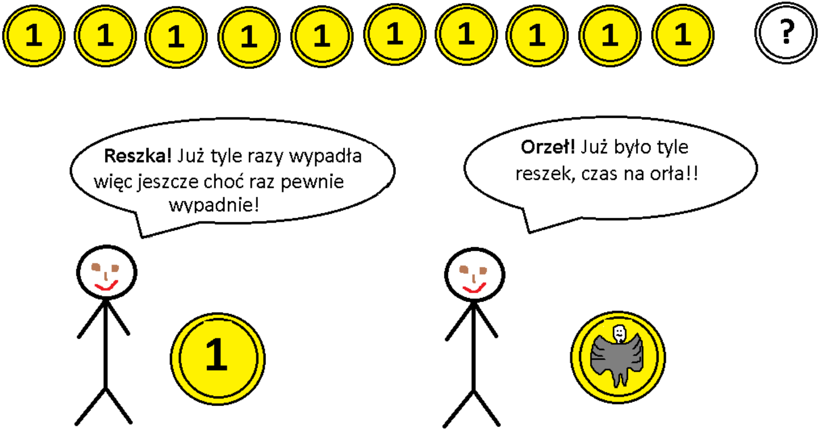
Rzucamy monetą, i po pewnym czasie pojawia się seria 10 Reszek!

Co **raczej** wypadnie następne?

Intuicja....

Rzucamy monetą, i po pewnym czasie pojawia się seria 10 Reszek!

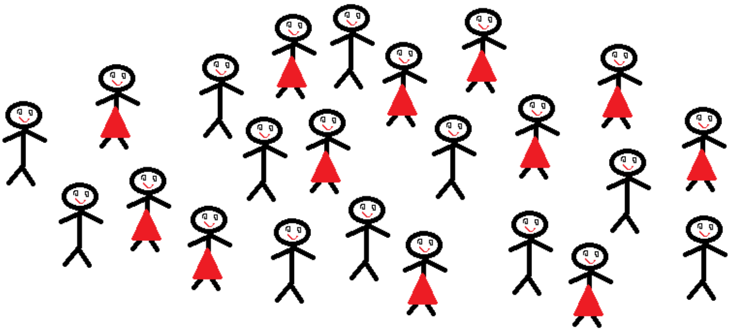
Co **raczej** wypadnie następne?



Paradoks dnia urodzin

Problem

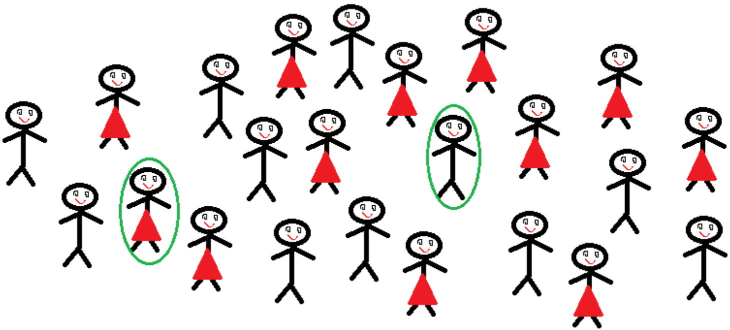
Jak liczna musi być klasa w szkole, by z szansą przynajmniej $\frac{1}{2}$, co najmniej dwoje uczniów miało urodziny tego samego dnia?



Paradoks dnia urodzin

Problem

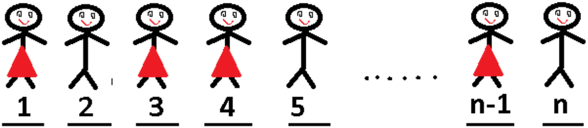
Jak liczna musi być klasa w szkole, by z szansą przynajmniej $\frac{1}{2}$, co najmniej dwoje uczniów miało urodziny tego samego dnia?



Rozwiązanie

Przeanalizujemy prawdopodobieństwo sytuacji przeciwnej - że żadnych dwoje uczniów nie ma urodzin tego samego dnia.

Ustawmy uczniów w rząd:



Wszystkich możliwości przyporządkowania dnia urodzin jest:

$$365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365 = 365^n$$

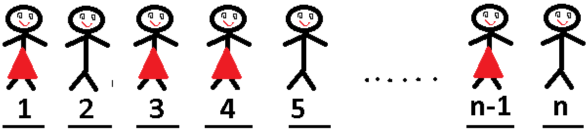
a możliwości, że żadna dwójka nie ma urodzin tego samego dnia:

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - (n-2)) \cdot (365 - (n-1))$$

Rozwiązanie

Przeanalizujemy prawdopodobieństwo sytuacji przeciwnej - że żadnych dwoje uczniów nie ma urodzin tego samego dnia.

Ustawmy uczniów w rząd:

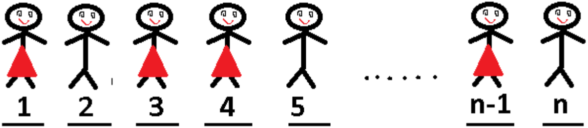


Wszystkich możliwości przyporządkowania dnia urodzin jest:

$$365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365 = 365^n$$

a możliwości, że żadna dwójka nie ma urodzin tego samego dnia:

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - (n-2)) \cdot (365 - (n-1))$$

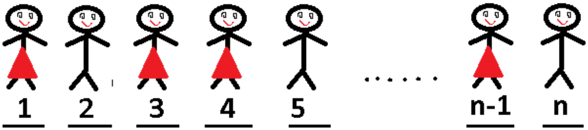


Prawdopodobieństwo, że **żadnych dwoje uczniów** nie ma urodzin tego samego dnia wynosi:

$$P = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-n+2) \cdot (365-n+1)}{365^n}$$

więc prawdopodobieństwo, że **któraś dwójka** ma urodziny tego samego dnia to

$$1 - P = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365-n+2) \cdot (365-n+1)}{365^n}$$

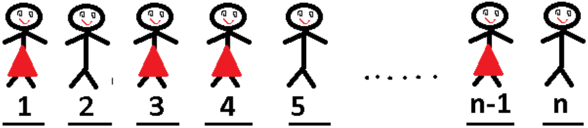


Prawdopodobieństwo, że **żadnych dwoje uczniów** nie ma urodzin tego samego dnia wynosi:

$$P = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 2) \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

więc prawdopodobieństwo, że **któraś dwójka** ma urodziny tego samego dnia to

$$1 - P = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 2) \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

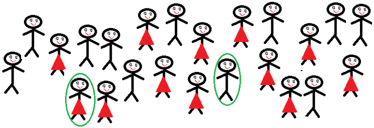


Prawdopodobieństwo, że **żadnych dwoje uczniów** nie ma urodzin tego samego dnia wynosi:

$$P = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 2) \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

więc prawdopodobieństwo, że **któraś dwójka** ma urodziny tego samego dnia to

$$1 - P = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 2) \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$



Szukamy więc n tak dużego, by

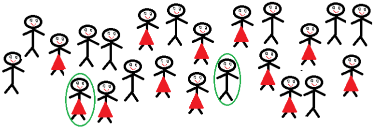
$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 2) \cdot (365 - n + 1)}{365^n} > \frac{1}{2}$$

Okazuje się że dla $n = 23$, otrzymujemy

$$1 - P \approx 0,507$$

a np. dla $n = 57$ już

$$1 - P \approx 0,99$$



Szukamy więc n tak dużego, by

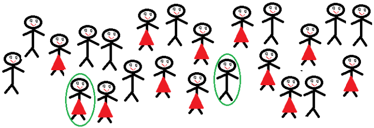
$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 2) \cdot (365 - n + 1)}{365^n} > \frac{1}{2}$$

Okazuje się że dla $n = 23$, otrzymujemy

$$1 - P \approx 0,507$$

a np. dla $n = 57$ już

$$1 - P \approx 0,99$$



Szukamy więc n tak dużego, by

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 2) \cdot (365 - n + 1)}{365^n} > \frac{1}{2}$$

Okazuje się że dla $n = 23$, otrzymujemy

$$1 - P \approx 0,507$$

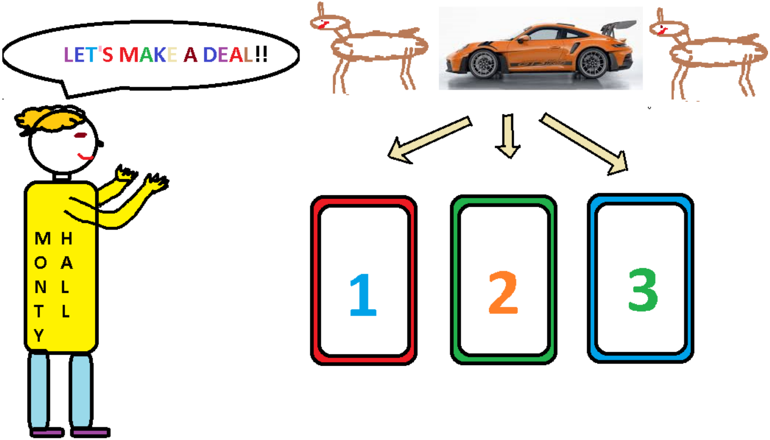
a np. dla $n = 57$ już

$$1 - P \approx 0,99$$

Paradoks Monty'ego-Halla

Paradoks Monty'ego-Halla

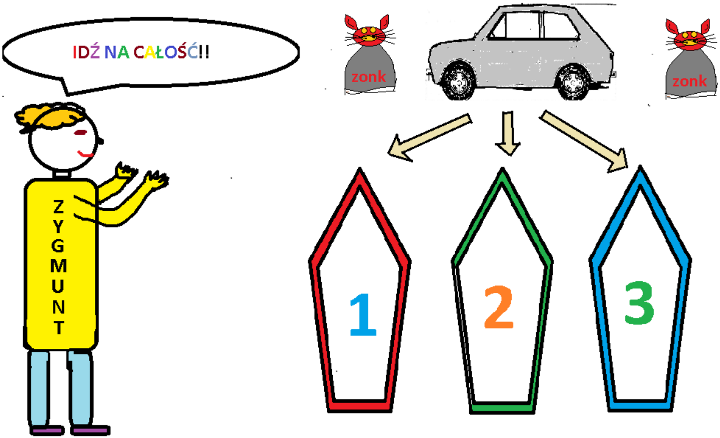
W jednej z trzech bramek znajduje się nagroda



Paradoks Zygmunta Chajzera

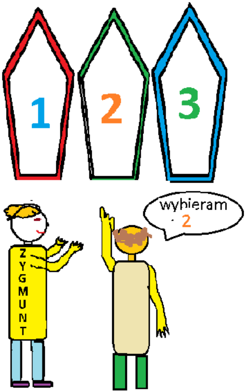
Paradoks ... Zygmunta Chajzera?

W jednej z trzech bramek znajduje się nagroda



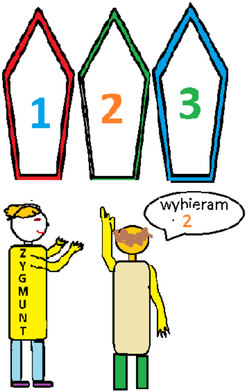
Paradoks Monty'ego-Halla

Gracz wybiera jedną z bramek



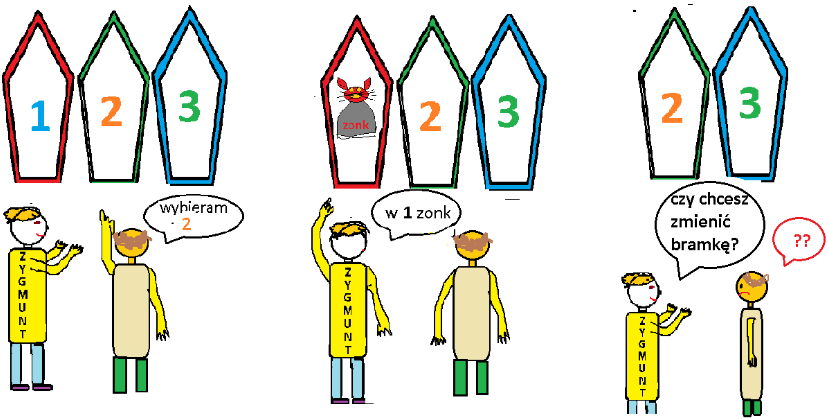
Paradoks Monty'ego-Halla

Pan Zygmunt odsłania jedną z niewybranych bramek z Zonkiem



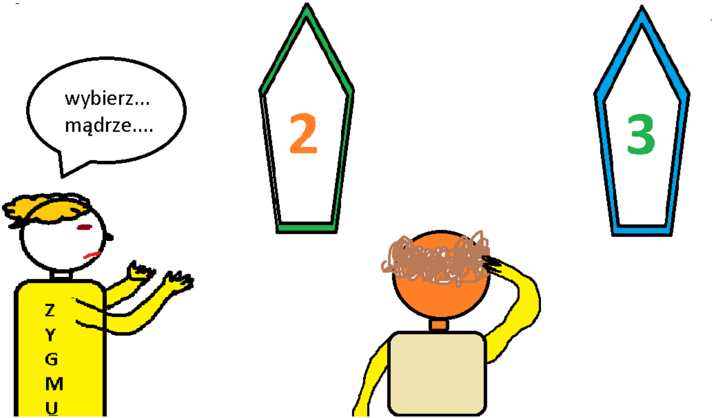
Paradoks Monty'ego-Halla

Gracz ma wybór - zmienić bramkę czy zostać przy swoim wyborze



Paradoks Monty'ego-Halla

Gracz ma wybór - zmienić bramkę czy zostać przy swoim wyborze



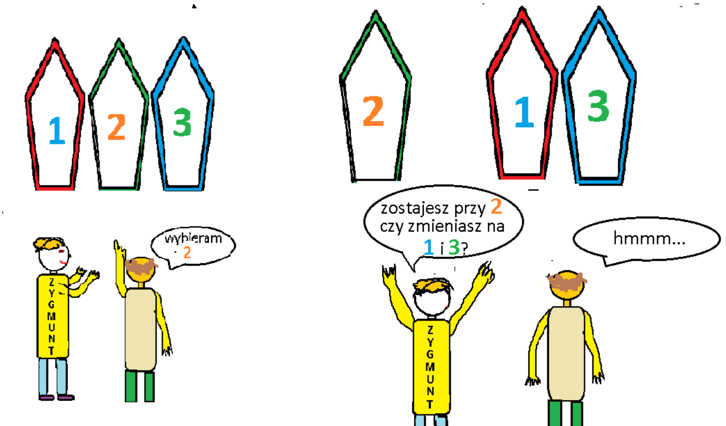
Paradoks Monty'ego-Halla

Gracz ma wybór - zmienić bramkę czy zostać przy swoim wyborze

Rozwiązanie I

A gdyby p. Zygmunt nie odsłaniał bramki, tylko zadał inne pytanie:

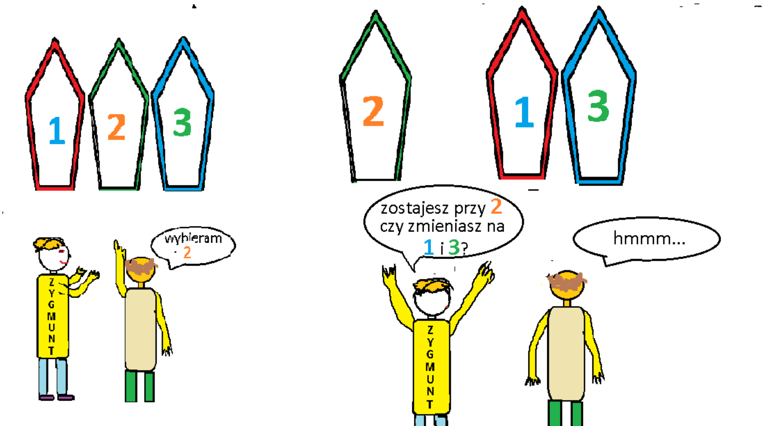
Czy zostajesz przy swoim wyborze, czy chcesz zmienić na to co jest w pozostałych dwóch bramkach?



Rozwiązanie I

A gdyby p. Zygmunt nie odsłaniał bramki, tylko zadał inne pytanie:

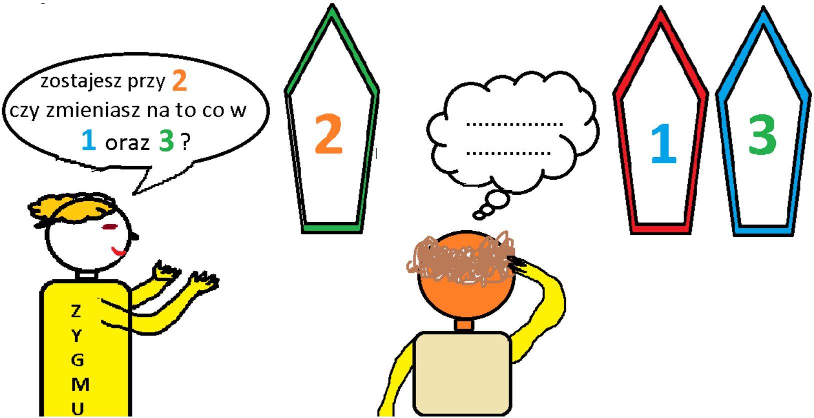
Czy zostajesz przy swoim wyborze, czy chcesz zmienić na to co jest w pozostałych dwóch bramkach?



Rozwiązanie I

A gdyby p. Zygmunt nie odsłaniał bramki, tylko zadał inne pytanie:

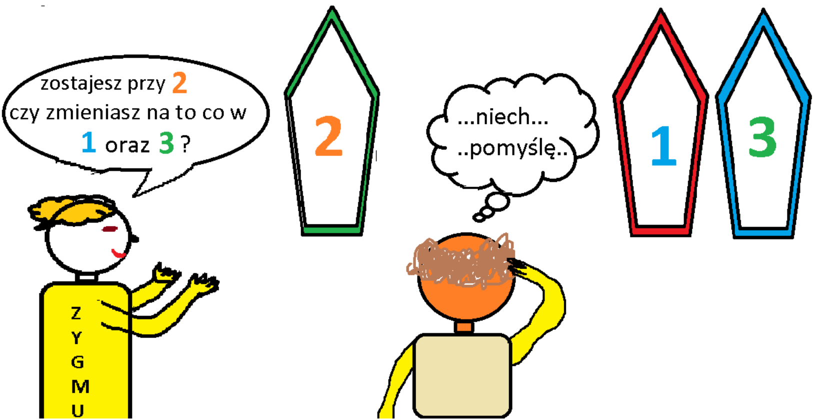
Czy zostajesz przy swoim wyborze, czy chcesz zmienić na to co jest w pozostałych dwóch bramkach?



Rozwiązanie I

A gdyby p. Zygmunt nie odsłaniał bramki, tylko zadał inne pytanie:

Czy zostajesz przy swoim wyborze, czy chcesz zmienić na to co jest w pozostałych dwóch bramkach?



Rozwiązanie I

A gdyby p. Zygmunt nie odsłaniał bramki, tylko zadał inne pytanie:

Czy zostajesz przy swoim wyborze, czy chcesz zmienić na to co jest w pozostałych dwóch bramkach?

Rozwiązanie I

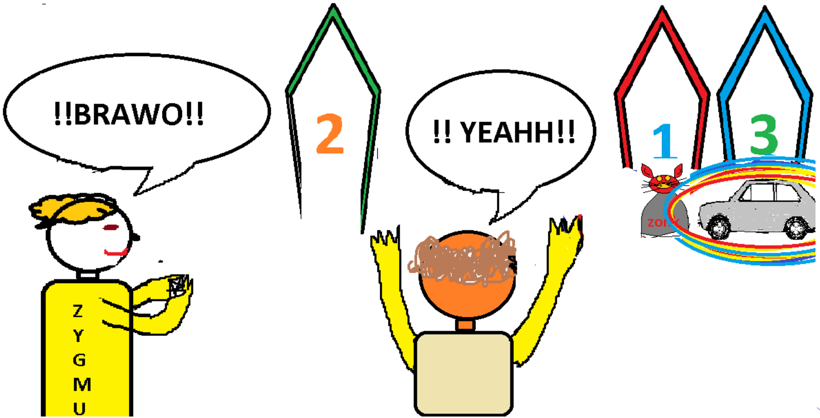
A gdyby p. Zygmunt nie odsłaniał bramki, tylko zadał inne pytanie:

Czy zostajesz przy swoim wyborze, czy chcesz zmienić na to co jest w pozostałych dwóch bramkach?

Rozwiązanie I

A gdyby p. Zygmunt nie odsłaniał bramki, tylko zadał inne pytanie:

Czy zostajesz przy swoim wyborze, czy chcesz zmienić na to co jest w pozostałych dwóch bramkach?



Dobry wybór!

Szansa że nagroda jest w pozostałych dwóch bramkach to $\frac{2}{3}$

Zasady tej „nowej wersji” są *de facto* takie jak oryginalnej - albo zostajemy przy swoim wyborze albo zmieniamy na to co jest w pozostałych bramkach.

Dobry wybór!

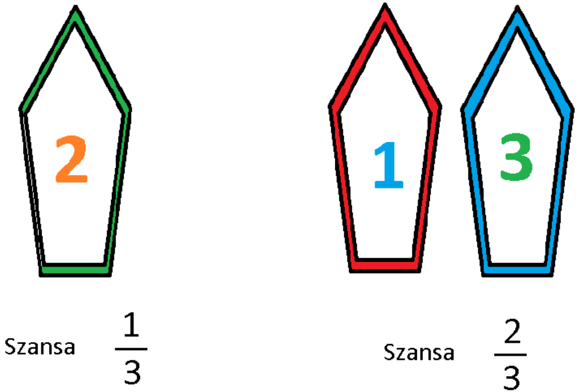
Szansa że nagroda jest w pozostałych dwóch bramkach to $\frac{2}{3}$

Zasady tej ,,nowej wersji" są *de facto* takie jak oryginalnej - albo zostajemy przy swoim wyborze albo zmieniamy na to co jest w pozostałych bramkach.

Podsumowując:

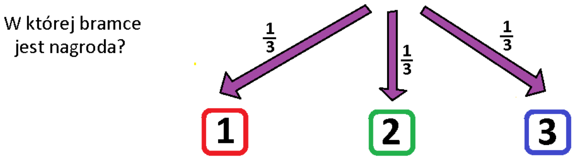
Zostając przy swoim wyborze pozostajemy przy szansie $\frac{1}{3}$

Zmieniając bramkę, prawdopodobieństwo wygranej wzrasta do $\frac{2}{3}$



Rozwiązanie II – Metoda „drzewka”

Wybieramy bramkę numer 2

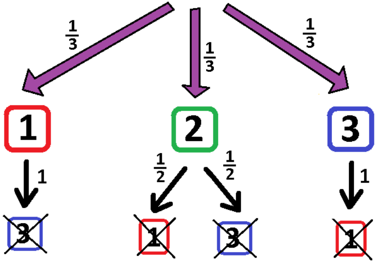


Rozwiązanie II – Metoda „drzewka”

Wybieramy bramkę numer 2

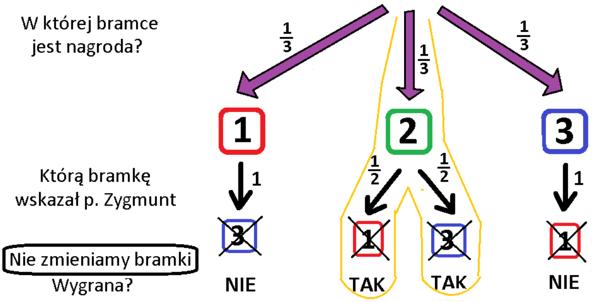
W której bramce jest nagroda?

Którą bramkę wskazał p. Zygmunt



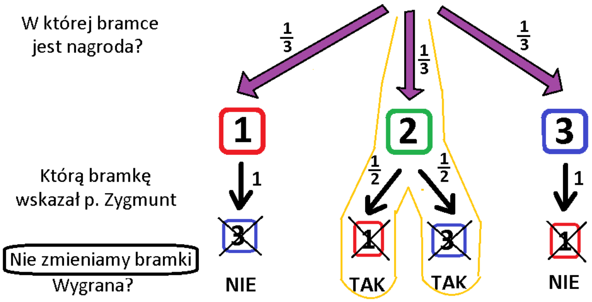
Rozwiązanie II – Metoda „drzewka”

Wybieramy bramkę numer 2



Rozwiązanie II – Metoda „drzewka”

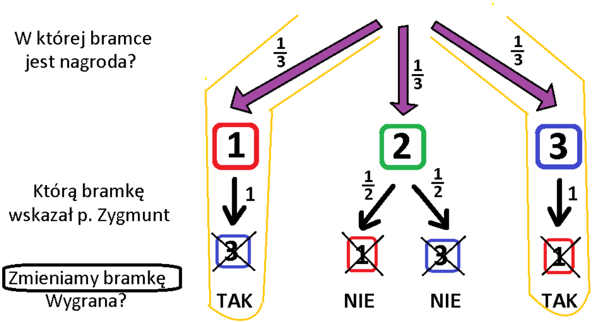
Wybieramy bramkę numer 2



Prawdopodobieństwo wygranej: $P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

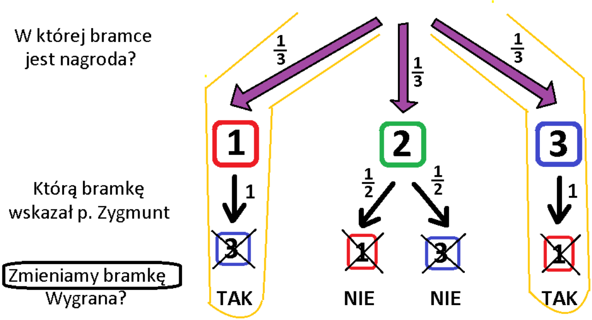
Rozwiązanie II – Metoda „drzewka”

Wybieramy bramkę numer 2



Rozwiązanie II – Metoda „drzewka”

Wybieramy bramkę numer 2



Prawdopodobieństwo wygranej: $P = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

Analiza konkretnej sytuacji - wzór Bayesa

Załóżmy, że

- Gracz wybrał bramkę numer **2**
- Pan Zygmunt odsłonił bramkę numer **1**

Pytamy więc o tzw. prawdopodobieństwa warunkowe:

$$\frac{\text{Prawdopodobieństwo tego, że nagroda jest w bramce numer } \mathbf{2}}{\text{pan Zygmunt odsłonił bramkę numer } \mathbf{1}}$$

pod warunkiem, że

Aby obliczyć to prawdopodobieństwe, należy prawdopodobieństwo zdarzenia *sprzyjającego* podzielić przez prawdopodobieństwo *wszystkich możliwości*, lecz w ramach zdarzenia warunkującego

Analiza konkretnej sytuacji - wzór Bayesa

Załóżmy, że

- Gracz wybrał bramkę numer **2**
- Pan Zygmunt odsłonił bramkę numer **1**

Pytamy więc o tzw. prawdopodobieństwa warunkowe:

Prawdopodobieństwo tego, że nagroda jest w bramce numer **2**

pod warunkiem, że

pan Zygmunt odsłonił bramkę numer **1**

Aby obliczyć to prawdopodobieństwe, należy prawdopodobieństwo zdarzenia *sprzyjającego* podzielić przez prawdopodobieństwo *wszystkich możliwości*, lecz w ramach zdarzenia warunkującego

Analiza konkretnej sytuacji - wzór Bayesa

Załóżmy, że

- Gracz wybrał bramkę numer **2**
- Pan Zygmunt odsłonił bramkę numer **1**

Pytamy więc o tzw. prawdopodobieństwa warunkowe:

Prawdopodobieństwo tego, że nagroda jest w bramce numer **2**

pod warunkiem, że

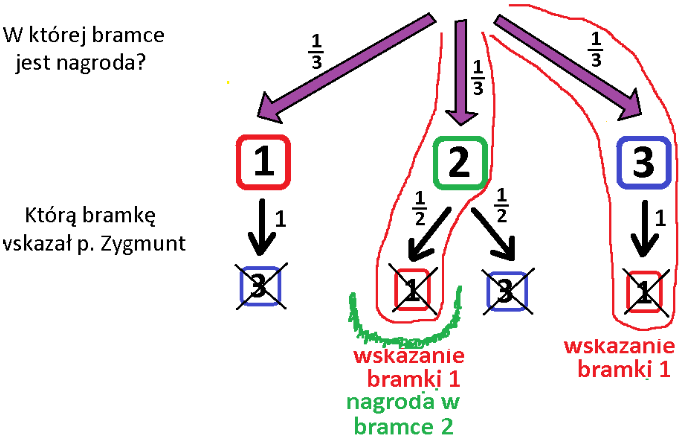
pan Zygmunt odsłonił bramkę numer **1**

Aby obliczyć to prawdopodobieństwe, należy prawdopodobieństwo zdarzenia *sprzyjającego* podzielić przez prawdopodobieństwo *wszystkich możliwości*, lecz w ramach zdarzenia warunkującego

Zdarzenie *sprzyjające*:

wygrana w bramce numer **2** i odsłonięcie bramki **1**

Wszystkie możliwości: odsłonięcie bramki **1**



- Prawdopodobieństwo zdarzenia *sprzyjającego*:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

- Prawdopodobieńtwo *wszystkich możliwości*:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{3}{6}$$

- szukane prawdopodobieńtwo warunkowe:

$$P = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

- Prawdopodobieństwo zdarzenia *sprzyjającego*:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

- Prawdopodobieńtwo *wszystkich możliwości*:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{3}{6}$$

- szukane prawdopodobieńtwo warunkowe:

$$P = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

- Prawdopodobieństwo zdarzenia *sprzyjającego*:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

- Prawdopodobieńtwo *wszystkich możliwości*:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{3}{6}$$

- szukane prawdopodobieńtwo warunkowe:

$$P = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Podsumowując:

Prawdopodobieństwo tego, że nagroda jest w bramce numer **2**

pod warunkiem, że

pan Zygmunt odsłonił bramkę numer **1** wynosi

$$P = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Podobnie możemy pokazać, że:

Prawdopodobieństwo tego, że nagroda jest w bramce numer **3**

pod warunkiem, że

pan Zygmunt odsłonił bramkę numer **1** wynosi

$$P = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Podsumowując:

Prawdopodobieństwo tego, że nagroda jest w bramce numer **2**

pod warunkiem, że

pan Zygmunt odsłonił bramkę numer **1** wynosi

$$P = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Podobnie możemy pokazać, że:

Prawdopodobieństwo tego, że nagroda jest w bramce numer **3**

pod warunkiem, że

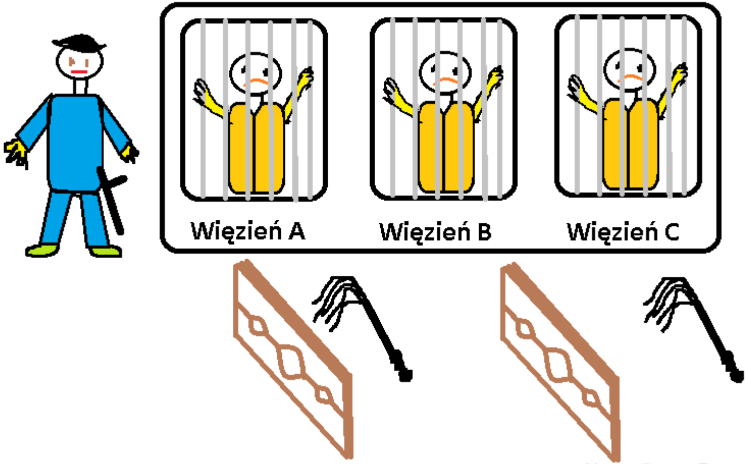
pan Zygmunt odsłonił bramkę numer **1** wynosi

$$P = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Inne sformułowanie - Paradoks więźnia

Spośród trójki więźniów, **A**, **B** oraz **C**, dwójkę czeka nazajutrz zakucie w dyby, a jeden zostanie wypuszczony.

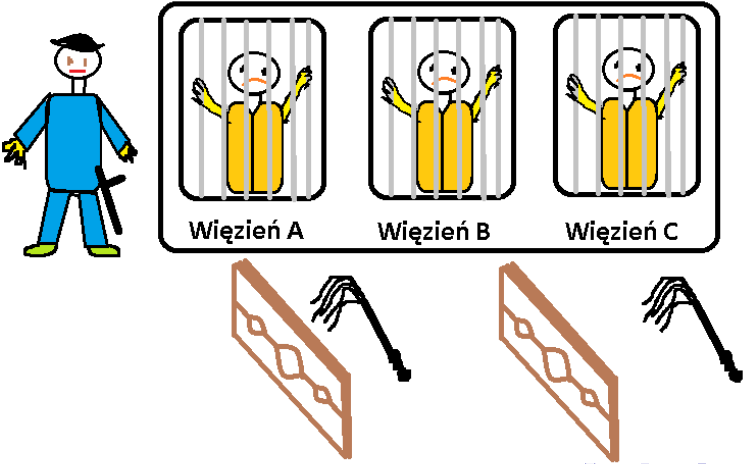
Nie wiedzą jednak który...



Inne sformułowanie - Paradoks więźnia

Spośród trójki więźniów, **A**, **B** oraz **C**, dwójkę czeka nazajutrz zakucie w dyby, a jeden zostanie wypuszczony.

Nie wiedzą jednak który...



Więzień **A** pyta strażnika o to, który z jego współwięźniów będzie jutro odbywał karę

Więzień **A** pyta strażnika o to, który z jego współwięźniów będzie jutro odbywał karę

Więzień **A** cieszy się bo chyba szansa na uwolnienie wzrosła mu do połowy!

Więzień **A** cieszy się bo chyba szansa na uwolnienie wzrosła mu do połowy!

Ale czy na pewno?...

Szansa na uwolnienie **A** to wciąż $\frac{1}{3}$

Ale...

Szansa na uwolnienie **C** wzrosła do $\frac{2}{3}$

Tak samo jak zamiana bramki w „Idź na całość” zwiększa pawdopodobieństwo wygranej do $\frac{2}{3}$.

Tu cele są „bramkami”, wypuszczenie na wolność to „nagroda”, a informacja o więźniu który będzie zakuty w dyby to „odsłonięcie bramki”

Szansa na uwolnienie **A** to wciąż $\frac{1}{3}$

Ale...

Szansa na uwolnienie **C** wzrosła do $\frac{2}{3}$

Tak samo jak zamiana bramki w „Idź na całość” zwiększa pawdopodobieństwo wygranej do $\frac{2}{3}$.

Tu cele są „bramkami”, wypuszczenie na wolność to „nagroda”, a informacja o więźniu który będzie zakuty w dyby to „odsłonięcie bramki”

Szansa na uwolnienie **A** to wciąż $\frac{1}{3}$

Ale...

Szansa na uwolnienie **C** wzrosła do $\frac{2}{3}$

Tak samo jak zamiana bramki w „Idź na całość” zwiększa pawdopodobieństwo wygranej do $\frac{2}{3}$.

Tu cele są „bramkami”, wypuszczenie na wolność to „nagroda”, a informacja o więźniu który będzie zakuty w dyby to „odsłonięcie bramki”

Wróćmy do pierwszego problemu...

Co **raczej** wypadnie następne po wyrzuceniu 10 reszek pod rząd?

Wróćmy do pierwszego problemu...

Co **raczej** wypadnie następne po wyrzuceniu 10 reszek pod rząd?

Wróćmy do pierwszego problemu...

Co **raczej** wypadnie następne po wyrzuceniu 10 reszek pod rząd?

Czy podobne wątpliwości będziemy mieli gdyby wypadł układ:

Oba układy tylko „wyglądają” inaczej i mają takie samo prawdopodobieństwo równe $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$.

Szansa na Orła i Reszkę w kolejnym rzucie wynosi tyle samo: $\frac{1}{2}$

Wróćmy do pierwszego problemu...

Co **raczej** wypadnie następne po wyrzuceniu 10 reszek pod rząd?

Czy podobne wątpliwości będziemy mieli gdyby wypadł układ:

Oba układy tylko „wyglądają” inaczej i mają takie samo prawdopodobieństwo równe $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$.

Szansa na Orła i Reszkę w kolejnym rzucie wynosi tyle samo: $\frac{1}{2}$

Rzucając monetą odpowiednio długo pojawi się dowolnie długi, określony wcześniej układ Orłów i Reszek!

Podobnie

Wybierając losowo litery z alfabetu i czekając odpowiednio długo uzyskamy wszytkie możliwe słowa, zadania, a nawet całe książki!

Czasem formułuje się to tak, że małpa losując litery napisze poemat Szekspira...

Rzucając monetą odpowiednio długo pojawi się dowolnie długi, określony wcześniej układ Orłów i Reszek!

Podobnie

Wybierając losowo litery z alfabetu i czekając odpowiednio długo uzyskamy wszytkie możliwe słowa, zadania, a nawet całe książki!

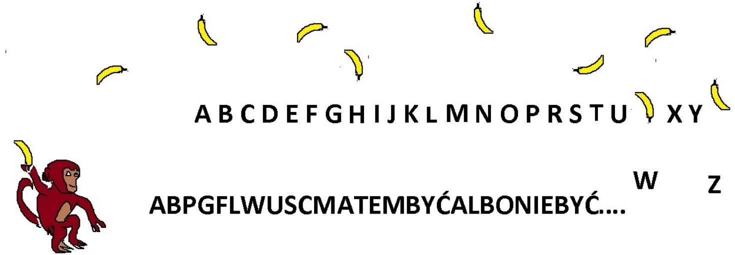
Czasem formułuje się to tak, że małpa losując litery napisze poemat Szekspira...

Rzucając monetą odpowiednio długo pojawi się dowolnie długi, określony wcześniej układ Orłów i Reszek!

Podobnie

Wybierając losowo litery z alfabetu i czekając odpowiednio długo uzyskamy wszystkie możliwe słowa, zadania, a nawet całe książki!

Czasem formułuje się to tak, że małpa losując litery napisze poemat Szekspira...



Dziękuję za uwagę!