Katastrofy mostów, czyli o zjawisku rezonansu

Igor Kossowski

Instytut Matematyki PŁ

12.12.2023

Katastrofa mostu Tacoma

Rysunek: Źródło:
https://www.flickr.com/photos/8337233@N06/4861196200

Katastrofa mostu Tacoma

Rysunek: Źródło: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tacoma-narrows-bridge-collapse.jpg

Równanie ruchu

Z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy

$$F_{\text{wypadkowa}} = ma$$

Równanie ruchu

Z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy

$$F_{\text{wypadkowa}} = ma$$

$$F_{\text{wypadkowa}} = -kx - bv + F$$

Równanie ruchu

Z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy

$$F_{\text{wypadkowa}} = ma$$

$$F_{\text{wypadkowa}} = -kx - bv + F$$

Zatem

$$ma = -kx - bv + F$$

Równanie ruchu

Z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy

$$F_{\text{wypadkowa}} = ma$$

$$F_{\text{wypadkowa}} = -kx - bv + F$$

Zatem

$$ma = -kx - bv + F$$

- $x(t)$ – położenie w chwili t

Równanie ruchu

Z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy

$$F_{\text{wypadkowa}} = ma$$

$$F_{\text{wypadkowa}} = -kx - bv + F$$

Zatem

$$ma = -kx - bv + F$$

- $x(t)$ – położenie w chwili t
- $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ – prędkość w chwili t

Równanie ruchu

Z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy

$$F_{\text{wypadkowa}} = ma$$

$$F_{\text{wypadkowa}} = -kx - bv + F$$

Zatem

$$ma = -kx - bv + F$$

- $x(t)$ – położenie w chwili t
- $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ – prędkość w chwili t
- $a(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)$ – przyspieszenie w chwili t

Równanie ruchu

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + kx(t) = F(t)$$

Równanie ruchu

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + kx(t) = F(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

- $\beta = \frac{b}{2m}$ – współczynnik tłumienia
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – częstość drgań własnych
- $f(t) = \frac{F(t)}{m}$

Rozwiązanie równania ruchu

Załóżmy, że $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$. Wtedy

$$f(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) = f_0 \cos(\Omega t),$$

gdzie $f_0 = \frac{F_0}{m}$. Ponadto, załóżmy, że $\omega_0 > \beta$.

Rozwiązanie równania ruchu

Załóżmy, że $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$. Wtedy

$$f(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) = f_0 \cos(\Omega t),$$

gdzie $f_0 = \frac{F_0}{m}$. Ponadto, załóżmy, że $\omega_0 > \beta$.

Rozwiązanie równania ruchu

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\Big(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\Big) + A \cos(\Omega t - \theta),$$

Rozwiązanie równania ruchu

Załóżmy, że $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$. Wtedy

$$f(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) = f_0 \cos(\Omega t),$$

gdzie $f_0 = \frac{F_0}{m}$. Ponadto, załóżmy, że $\omega_0 > \beta$.

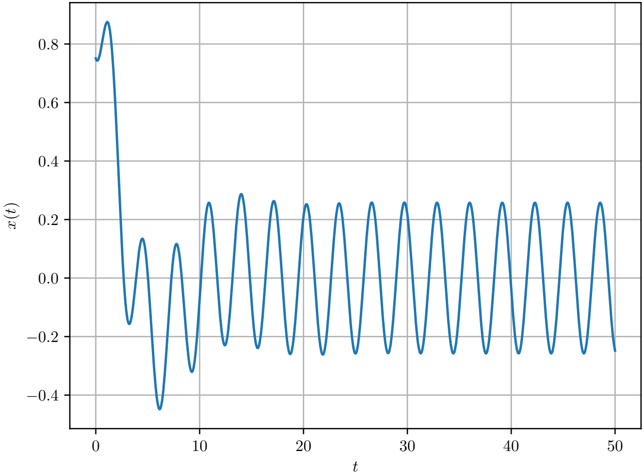
Rozwiązanie równania ruchu

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\Big(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\Big) + A \cos(\Omega t - \theta),$$

gdzie $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ oraz

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

Wykres przykładowego rozwiązania

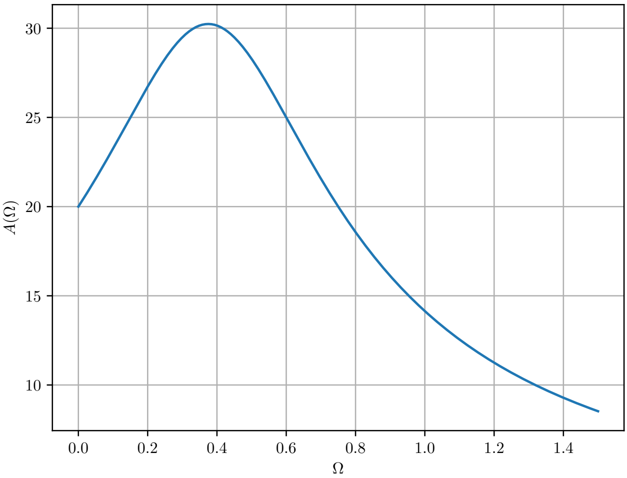


Rezonans wychyleń

Amplituda drgań wymuszonych

$$A(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

Krzywa rezonansowa



Częstość rezonansowa

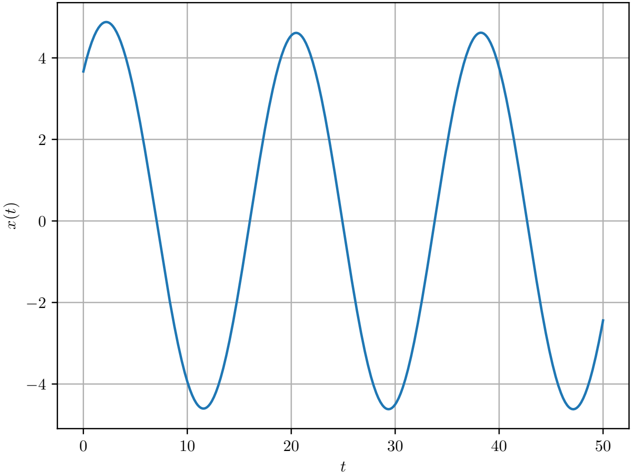
Częstość rezonansowa to taka wartość częstości Ω dla której amplituda drgań wymuszonych jest największa.

Częstość rezonansowa

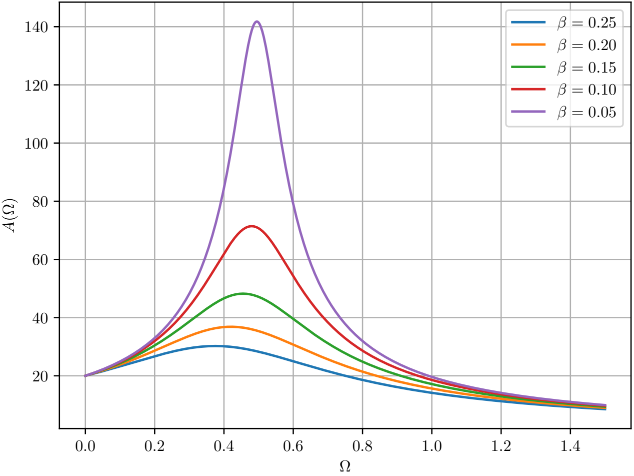
Częstość rezonansowa to taka wartość częstości Ω dla której amplituda drgań wymuszonych jest największa. Można pokazać, że

$$\Omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

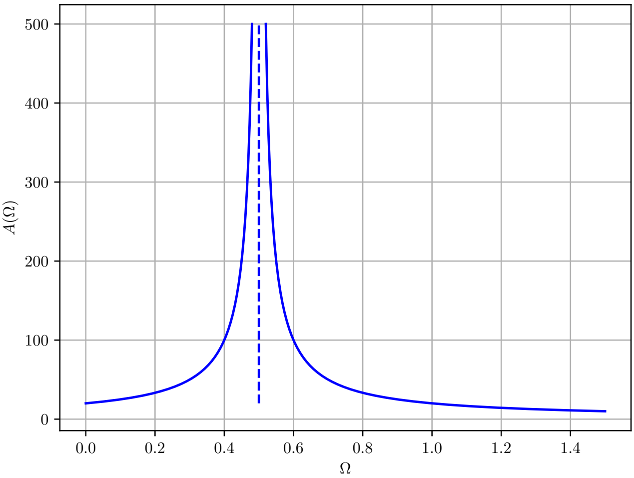
Drgania rezonansowe



Zależność od współczynnika tłumienia



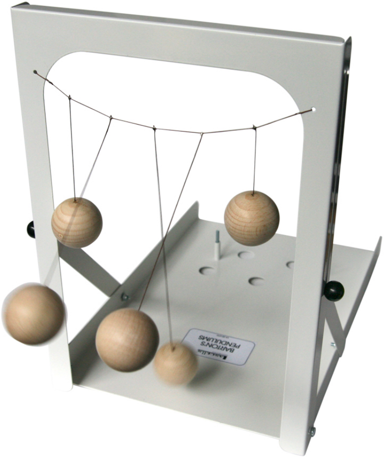
Przypadek braku tłumienia



Inne przykłady zjawiska rezonansu

Rysunek: Źródło:
https://futurism.com/science-sound-breaking-glass-panes-car-speakers

Inne przykłady zjawiska rezonansu



Rysunek: https://ciderhousetech.com.au/product/bartons-pendulums/

Problemy rezonansowe

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t), \quad x(0) = x\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right), \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$$

Dziękuję za uwagę!