20 pudełek, permutacje i cykle

Włodzimierz Fechner
wlodzimierz.fechner@p.lodz.pl
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

Spotkania z Matematyką Stosowaną

Plan spotkania

Gra

Strategie

Matematyka

Rozwiązanie problemu

Nudne wprowadzenie

20 nowo przyjętych studentów 1 roku Matematyki Stosowanej będzie uroczyście odbierać legitymacje.

Nudne wprowadzenie

20 nowo przyjętych studentów 1 roku Matematyki Stosowanej będzie uroczyście odbierać legitymacje.

Każda z 20 legitymacji jest umieszczona w pudełku podpisanym imieniem i nazwiskiem studenta.

Nudne wprowadzenie

20 nowo przyjętych studentów 1 roku Matematyki Stosowanej będzie uroczyście odbierać legitymacje.

Każda z 20 legitymacji jest umieszczona w pudełku podpisanym imieniem i nazwiskiem studenta.

Tak przygotowane pudełka czekają w Auli Major wydziału FTIMS.

Akcja się rozkręca

Przed uroczystością do pustej auli zakradają się studenci starszych lat, którzy losowo zamieniają legitymacje w pudełkach.

Akcja się rozkręca

Przed uroczystością do pustej auli zakradają się studenci starszych lat, którzy losowo zamieniają legitymacje w pudełkach.

Teraz dalej w każdym pudełku jest jedna legitymacja, ale nie wiadomo czyja.

Akcja się rozkręca

Przed uroczystością do pustej auli zakradają się studenci starszych lat, którzy losowo zamieniają legitymacje w pudełkach.

Teraz dalej w każdym pudełku jest jedna legitymacja, ale nie wiadomo czyja.

Starszacy opuścili aulę, a studenci pierwszego roku otrzymali od nich informację o tym, że legitymacje zostały podmienione.

Akcja się rozkręca

Przed uroczystością do pustej auli zakradają się studenci starszych lat, którzy losowo zamieniają legitymacje w pudełkach.

Teraz dalej w każdym pudełku jest jedna legitymacja, ale nie wiadomo czyja.

Starszacy opuścili aulę, a studenci pierwszego roku otrzymali od nich informację o tym, że legitymacje zostały podmienione.

Jeśli jednak każdemu z nich uda się odebrać z rąk Dziekana swój dokument, to otrzymają od starszych kolegów specjalną nagrodę w postaci bezcennych notatek z Analizy Matematycznej, dzięki którym uda im się zdać egzamin z wynikiem 5.0.

Akcja nabiera tempa

Za kilka chwil studenci będą poproszeni o wejście do auli.

Akcja nabiera tempa

Za kilka chwil studenci będą poproszeni o wejście do auli.

Ustalili, że będą wchodzić pojedynczo i każdy z nich ma szansę podejrzeć zawartość połowy, tj. 10 pudełek.

Akcja nabiera tempa

Za kilka chwil studenci będą poproszeni o wejście do auli.

Ustalili, że będą wchodzić pojedynczo i każdy z nich ma szansę podejrzeć zawartość połowy, tj. 10 pudełek.

Niestety, po wejściu do auli nie mogą się w żaden sposób komunikować.

Akcja nabiera tempa

Za kilka chwil studenci będą poproszeni o wejście do auli.

Ustalili, że będą wchodzić pojedynczo i każdy z nich ma szansę podejrzeć zawartość połowy, tj. 10 pudełek.

Niestety, po wejściu do auli nie mogą się w żaden sposób komunikować.

Dziekan będzie kolejno odczytywać nazwiska z pudełek. A gdy osoba podejdzie do niego, wtedy je otworzy i wręczy zawartość.

Akcja nabiera tempa

Za kilka chwil studenci będą poproszeni o wejście do auli.

Ustalili, że będą wchodzić pojedynczo i każdy z nich ma szansę podejrzeć zawartość połowy, tj. 10 pudełek.

Niestety, po wejściu do auli nie mogą się w żaden sposób komunikować.

Dziekan będzie kolejno odczytywać nazwiska z pudełek. A gdy osoba podejdzie do niego, wtedy je otworzy i wręczy zawartość.

Chodzi więc o to, żeby każdy z naszej 20-tki podszedł do Dziekana nie gdy jest wyczytywane jego nazwisko, tylko nazwisko osoby, w której pudełku jest jego legitymacja.

Akcja nabiera tempa

Za kilka chwil studenci będą poproszeni o wejście do auli.

Ustalili, że będą wchodzić pojedynczo i każdy z nich ma szansę podejrzeć zawartość połowy, tj. 10 pudełek.

Niestety, po wejściu do auli nie mogą się w żaden sposób komunikować.

Dziekan będzie kolejno odczytywać nazwiska z pudełek. A gdy osoba podejdzie do niego, wtedy je otworzy i wręczy zawartość.

Chodzi więc o to, żeby każdy z naszej 20-tki podszedł do Dziekana nie gdy jest wyczytywane jego nazwisko, tylko nazwisko osoby, w której pudełku jest jego legitymacja.

Jakie są szanse na to, że każdy z nich odgadnie w którym pudełku jest jego dokument?

Podsumowanie obecnej sytuacji

Każdy z 20 nowo przyjętych studentów może poznać zawartość 10 pudełek.

Podsumowanie obecnej sytuacji

Każdy z 20 nowo przyjętych studentów może poznać zawartość 10 pudełek.

Żaden z nich nie może się komunikować z pozostałymi, żeby przekazać im swoją wiedzę.

Podsumowanie obecnej sytuacji

Każdy z 20 nowo przyjętych studentów może poznać zawartość 10 pudełek.

Żaden z nich nie może się komunikować z pozostałymi, żeby przekazać im swoją wiedzę.

Przed wejściem do auli mogą ustalić strategię, według której będą postępować.

Podsumowanie obecnej sytuacji

Każdy z 20 nowo przyjętych studentów może poznać zawartość 10 pudełek.

Żaden z nich nie może się komunikować z pozostałymi, żeby przekazać im swoją wiedzę.

Przed wejściem do auli mogą ustalić strategię, według której będą postępować.

Gra jest wygrana tylko jeśli **każdy z nich** odbierze swój dokument. Częściowy sukces jest traktowany na równi z porażką.

Złe lub bardzo złe strategie

Jedna z osób z grupy, powiedzmy, że nazywa się Marcin, argumentuje następująco:

Złe lub bardzo złe strategie

Jedna z osób z grupy, powiedzmy, że nazywa się Marcin, argumentuje następująco:

Skoro nie można się komunikować po poznaniu zawartości 10 pudełek, to jaki jest sens cokolwiek ustalać?

Złe lub bardzo złe strategie

Jedna z osób z grupy, powiedzmy, że nazywa się Marcin, argumentuje następująco:

Skoro nie można się komunikować po poznaniu zawartości 10 pudełek, to jaki jest sens cokolwiek ustalać? Niech każdy zaglądnie do ***pierwszych 10 pudełek****.*

Złe lub bardzo złe strategie

Jedna z osób z grupy, powiedzmy, że nazywa się Marcin, argumentuje następująco:

Skoro nie można się komunikować po poznaniu zawartości 10 pudełek, to jaki jest sens cokolwiek ustalać? Niech każdy zaglądnie do ***pierwszych 10 pudełek****. Wtedy mamy pewność, że 10 osób będzie wiedzieć, w którym pudełku jest ich legitymacja.*

Złe lub bardzo złe strategie

Jedna z osób z grupy, powiedzmy, że nazywa się Marcin, argumentuje następująco:

Skoro nie można się komunikować po poznaniu zawartości 10 pudełek, to jaki jest sens cokolwiek ustalać? Niech każdy zaglądnie do ***pierwszych 10 pudełek****. Wtedy mamy pewność, że 10 osób będzie wiedzieć, w którym pudełku jest ich legitymacja.*

Inna osoba, powiedzmy że ma na imię Ania, odpowiada mu tak:

Złe lub bardzo złe strategie

Jedna z osób z grupy, powiedzmy, że nazywa się Marcin, argumentuje następująco:

Skoro nie można się komunikować po poznaniu zawartości 10 pudełek, to jaki jest sens cokolwiek ustalać? Niech każdy zaglądnie do ***pierwszych 10 pudełek****. Wtedy mamy pewność, że 10 osób będzie wiedzieć, w którym pudełku jest ich legitymacja.*

Inna osoba, powiedzmy że ma na imię Ania, odpowiada mu tak:

Ale wtedy 10 osób na pewno nie wie, gdzie jest ich dokument.

Złe lub bardzo złe strategie

Jedna z osób z grupy, powiedzmy, że nazywa się Marcin, argumentuje następująco:

Skoro nie można się komunikować po poznaniu zawartości 10 pudełek, to jaki jest sens cokolwiek ustalać? Niech każdy zaglądnie do ***pierwszych 10 pudełek****. Wtedy mamy pewność, że 10 osób będzie wiedzieć, w którym pudełku jest ich legitymacja.*

Inna osoba, powiedzmy że ma na imię Ania, odpowiada mu tak:

Ale wtedy 10 osób na pewno nie wie, gdzie jest ich dokument. To oznacza, że nie mamy szans.

Złe lub bardzo złe strategie

Jedna z osób z grupy, powiedzmy, że nazywa się Marcin, argumentuje następująco:

Skoro nie można się komunikować po poznaniu zawartości 10 pudełek, to jaki jest sens cokolwiek ustalać? Niech każdy zaglądnie do ***pierwszych 10 pudełek****. Wtedy mamy pewność, że 10 osób będzie wiedzieć, w którym pudełku jest ich legitymacja.*

Inna osoba, powiedzmy że ma na imię Ania, odpowiada mu tak:

Ale wtedy 10 osób na pewno nie wie, gdzie jest ich dokument. To oznacza, że nie mamy szans. Proponuję, żeby każdy zajrzał do ***wybranych przez siebie losowo*** *10 pudełek.*

Złe lub bardzo złe strategie

Adam odpowiada jej na to:

Złe lub bardzo złe strategie

Adam odpowiada jej na to:

Policzmy więc jakie mamy wtedy szanse pewnej wygranej.

Złe lub bardzo złe strategie

Adam odpowiada jej na to:

Policzmy więc jakie mamy wtedy szanse pewnej wygranej. Każdy znalazł swój dokument z prawdopodobieństwem $1/2$*.*

Złe lub bardzo złe strategie

Adam odpowiada jej na to:

Policzmy więc jakie mamy wtedy szanse pewnej wygranej. Każdy znalazł swój dokument z prawdopodobieństwem $1/2$*. Ponieważ nie ustalamy ze sobą jakie pudełka każdy z nas otwiera, więc prawdopodobieństwa sukcesu każdego są niezależne od siebie.*

Złe lub bardzo złe strategie

Adam odpowiada jej na to:

Policzmy więc jakie mamy wtedy szanse pewnej wygranej. Każdy znalazł swój dokument z prawdopodobieństwem $1/2$*. Ponieważ nie ustalamy ze sobą jakie pudełka każdy z nas otwiera, więc prawdopodobieństwa sukcesu każdego są niezależne od siebie. Jest taki wzór, który poznamy wkrótce na przedmiocie Podstawy Probabilistyki, a który mówi, że w tym przypadku prawdopodobieństwa należy pomnożyć.*

Złe lub bardzo złe strategie

Adam odpowiada jej na to:

Policzmy więc jakie mamy wtedy szanse pewnej wygranej. Każdy znalazł swój dokument z prawdopodobieństwem $1/2$*. Ponieważ nie ustalamy ze sobą jakie pudełka każdy z nas otwiera, więc prawdopodobieństwa sukcesu każdego są niezależne od siebie. Jest taki wzór, który poznamy wkrótce na przedmiocie Podstawy Probabilistyki, a który mówi, że w tym przypadku prawdopodobieństwa należy pomnożyć. To daje nam szansę równą* $1/2^{20}$*.*

Trochę lepsza stratega

Do dyskusji przyłącza się Zosia:

Trochę lepsza stratega

Do dyskusji przyłącza się Zosia:

Liczba $1/2^{20}$ *to nieco mniej niż* $1/1\,000\,000$, *więc musimy wymyślić coś lepszego.*

Trochę lepsza stratega

Do dyskusji przyłącza się Zosia:

Liczba $1/2^{20}$ *to nieco mniej niż* $1/1\,000\,000$, *więc musimy wymyślić coś lepszego. Proponuję zmodyfikować strategię Marcina.*

Trochę lepsza stratega

Do dyskusji przyłącza się Zosia:

Liczba $1/2^{20}$ *to nieco mniej niż* $1/1\,000\,000$, *więc musimy wymyślić coś lepszego. Proponuję zmodyfikować strategię Marcina. Niech pierwsze 10 osób sprawdzi pierwsze 10 pudełek, a kolejna dziesiątka drugie 10 pudełek.*

Trochę lepsza stratega

Do dyskusji przyłącza się Zosia:

Liczba $1/2^{20}$ *to nieco mniej niż* $1/1\,000\,000$, *więc musimy wymyślić coś lepszego. Proponuję zmodyfikować strategię Marcina. Niech pierwsze 10 osób sprawdzi pierwsze 10 pudełek, a kolejna dziesiątka drugie 10 pudełek. Wtedy odpada argument Ani, o tym że 10 osób na pewno nie wie, gdzie jest ich dokument.*

Trochę lepsza stratega

Teraz odzywa się Filip:

Trochę lepsza stratega

Teraz odzywa się Filip:

Policzmy więc jakie mamy szanse przy strategii Zosi.

Trochę lepsza stratega

Teraz odzywa się Filip:

Policzmy więc jakie mamy szanse przy strategii Zosi. Jeśli pierwsze 10 osób znajdzie swoje legitymacje w pierwszych 10 pudełkach, to druga dziesiątka, która sprawdza kolejne 10 pudełek też.

Trochę lepsza stratega

Teraz odzywa się Filip:

Policzmy więc jakie mamy szanse przy strategii Zosi. Jeśli pierwsze 10 osób znajdzie swoje legitymacje w pierwszych 10 pudełkach, to druga dziesiątka, która sprawdza kolejne 10 pudełek też. Musimy więc obliczyć prawdopodobieństwo sukcesu tej pierwszej grupy.

Trochę lepsza stratega

Teraz odzywa się Filip:

Policzmy więc jakie mamy szanse przy strategii Zosi. Jeśli pierwsze 10 osób znajdzie swoje legitymacje w pierwszych 10 pudełkach, to druga dziesiątka, która sprawdza kolejne 10 pudełek też. Musimy więc obliczyć prawdopodobieństwo sukcesu tej pierwszej grupy. Ilość podzbiorów 10-elementowych zbioru 20-elementowego to $\binom{20}{10}$.

Trochę lepsza stratega

Teraz odzywa się Filip:

Policzmy więc jakie mamy szanse przy strategii Zosi. Jeśli pierwsze 10 osób znajdzie swoje legitymacje w pierwszych 10 pudełkach, to druga dziesiątka, która sprawdza kolejne 10 pudełek też. Musimy więc obliczyć prawdopodobieństwo sukcesu tej pierwszej grupy. Ilość podzbiorów 10-elementowych zbioru 20-elementowego to $\binom{20}{10}$*. My wygramy jeśli pierwsza dziesiątka trafi na właściwy zbiór.*

Trochę lepsza stratega

Teraz odzywa się Filip:

Policzmy więc jakie mamy szanse przy strategii Zosi. Jeśli pierwsze 10 osób znajdzie swoje legitymacje w pierwszych 10 pudełkach, to druga dziesiątka, która sprawdza kolejne 10 pudełek też. Musimy więc obliczyć prawdopodobieństwo sukcesu tej pierwszej grupy. Ilość podzbiorów 10-elementowych zbioru 20-elementowego to $\binom{20}{10}$*. My wygramy jeśli pierwsza dziesiątka trafi na właściwy zbiór. Niestety na moim telefonie nie umiem obliczyć wartości* $\binom{1/20}{10}$.

Trochę lepsza stratega

Filipowi pomaga Monika:

Trochę lepsza stratega

Filipowi pomaga Monika:

Przed chwilą znalazłam na ławce obok auli ściągę i chyba jest na niej coś co może nam pomóc.

Trochę lepsza stratega

Filipowi pomaga Monika:

Przed chwilą znalazłam na ławce obok auli ściągę i chyba jest na niej coś co może nam pomóc. To nazywa się wzór Stirlinga, podaje przybliżenie dla $n!$ *i wygląda tak:*

Trochę lepsza stratega

Filipowi pomaga Monika:

Przed chwilą znalazłam na ławce obok auli ściągę i chyba jest na niej coś co może nam pomóc. To nazywa się wzór Stirlinga, podaje przybliżenie dla $n!$ i wygląda tak:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

Trochę lepsza stratega

Filipowi pomaga Monika:

Przed chwilą znalazłam na ławce obok auli ściągę i chyba jest na niej coś co może nam pomóc. To nazywa się wzór Stirlinga, podaje przybliżenie dla $n!$ *i wygląda tak:*

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

Mamy stąd:

$$\binom{20}{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} \approx \frac{\left(\frac{20}{e}\right)^{20} \cdot \sqrt{2\pi 20}}{\left[\left(\frac{10}{e}\right)^{10} \cdot \sqrt{2\pi 10}\right]^2} = \sqrt{10\pi} \cdot 2^{20}.$$

Trochę lepsza stratega

Filipowi pomaga Monika:

Przed chwilą znalazłam na ławce obok auli ściągę i chyba jest na niej coś co może nam pomóc. To nazywa się wzór Stirlinga, podaje przybliżenie dla $n!$ i wygląda tak:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

Mamy stąd:

$$\binom{20}{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} \approx \frac{\left(\frac{20}{e}\right)^{20} \cdot \sqrt{2\pi 20}}{\left[\left(\frac{10}{e}\right)^{10} \cdot \sqrt{2\pi 10}\right]^2} = \sqrt{10\pi} \cdot 2^{20}.$$

To oznacza, że ta strategia jest $\sqrt{10\pi} \approx 5.6$ razy lepsza od losowego otwierania pudełek!

Trochę lepsza stratega

Monice przerywa Krzysztof:

Trochę lepsza stratega

Monice przerywa Krzysztof:

Nie rozumiem tutaj czegoś.

Trochę lepsza stratega

Monice przerywa Krzysztof:

Nie rozumiem tutaj czegoś. Jak to możliwe, że istnieje lepsza strategia od losowej?

Trochę lepsza stratega

Monice przerywa Krzysztof:

Nie rozumiem tutaj czegoś. Jak to możliwe, że istnieje lepsza strategia od losowej? Skoro nie mamy żadnej wiedzy o rozkładzie legitymacji w pudełkach, to nie powinno być tak, że nasza szansa zależy od tego jakie pudełka każdy z nas będzie otwierać.

Trochę lepsza stratega

Monice przerywa Krzysztof:

Nie rozumiem tutaj czegoś. Jak to możliwe, że istnieje lepsza strategia od losowej? Skoro nie mamy żadnej wiedzy o rozkładzie legitymacji w pudełkach, to nie powinno być tak, że nasza szansa zależy od tego jakie pudełka każdy z nas będzie otwierać.

Do dyskusji włącza się Paulina:

Trochę lepsza stratega

Monice przerywa Krzysztof:

Nie rozumiem tutaj czegoś. Jak to możliwe, że istnieje lepsza strategia od losowej? Skoro nie mamy żadnej wiedzy o rozkładzie legitymacji w pudełkach, to nie powinno być tak, że nasza szansa zależy od tego jakie pudełka każdy z nas będzie otwierać.

Do dyskusji włącza się Paulina:

Adam obliczając prawdopodobieństwo sukcesu przy strategii losowej wykorzystał wzór na prawdopodobieństwo zdarzeń niezależnych.

Trochę lepsza stratega

Monice przerywa Krzysztof:

Nie rozumiem tutaj czegoś. Jak to możliwe, że istnieje lepsza strategia od losowej? Skoro nie mamy żadnej wiedzy o rozkładzie legitymacji w pudełkach, to nie powinno być tak, że nasza szansa zależy od tego jakie pudełka każdy z nas będzie otwierać.

Do dyskusji włącza się Paulina:

Adam obliczając prawdopodobieństwo sukcesu przy strategii losowej wykorzystał wzór na prawdopodobieństwo zdarzeń niezależnych. Może więc chodzi o to, że powinniśmy otwierać pudełka w pewien szczególny sposób, tak żeby nie mnożyć prawdopodobieństw tyle razy przez siebie, bo to za każdym razem zmniejszało wynik dwa razy?

Czy istnieje idealna stratega?

Marek poruszył inny problem:

Czy istnieje idealna stratega?

Marek poruszył inny problem:

Spróbujmy więc oszacować z góry nasze szanse zwycięstwa.

Czy istnieje idealna stratega?

Marek poruszył inny problem:

Spróbujmy więc oszacować z góry nasze szanse zwycięstwa. Pierwszy z nas ma szanse $1/2$ *na znalezienie swojego dokumentu, niezależnie od tego jaką strategię dalej przyjmiemy.*

Czy istnieje idealna stratega?

Marek poruszył inny problem:

Spróbujmy więc oszacować z góry nasze szanse zwycięstwa. Pierwszy z nas ma szanse $1/2$ *na znalezienie swojego dokumentu, niezależnie od tego jaką strategię dalej przyjmiemy. Więc* $1/2$ *to górne ograniczenie prawdopodobieństwa.*

Czy istnieje idealna stratega?

Marek poruszył inny problem:

Spróbujmy więc oszacować z góry nasze szanse zwycięstwa. Pierwszy z nas ma szanse $1/2$ *na znalezienie swojego dokumentu, niezależnie od tego jaką strategię dalej przyjmiemy. Więc* $1/2$ *to górne ograniczenie prawdopodobieństwa. Czy możemy zbliżyć się do tej liczby?*

Czy istnieje idealna stratega?

Marek poruszył inny problem:

Spróbujmy więc oszacować z góry nasze szanse zwycięstwa. Pierwszy z nas ma szanse $1/2$ *na znalezienie swojego dokumentu, niezależnie od tego jaką strategię dalej przyjmiemy. Więc* $1/2$ *to górne ograniczenie prawdopodobieństwa. Czy możemy zbliżyć się do tej liczby?*

Zuzanna, która do dej pory nie brała udziału w dyskusji, rzuca taką propozycję:

Czy istnieje idealna stratega?

Marek poruszył inny problem:

Spróbujmy więc oszacować z góry nasze szanse zwycięstwa. Pierwszy z nas ma szanse $1/2$ na znalezienie swojego dokumentu, niezależnie od tego jaką strategię dalej przyjmiemy. Więc $1/2$ to górne ograniczenie prawdopodobieństwa. Czy możemy zbliżyć się do tej liczby?

Zuzanna, która do dej pory nie brała udziału w dyskusji, rzuca taką propozycję:

*Z naszej dyskusji wynika, że powinniśmy działać tak, żeby wprowadzić jak najsilniejszą **zależność** w naszych wyborach sprawdzanych pudełek.*

Czy istnieje idealna stratega?

Marek poruszył inny problem:

Spróbujmy więc oszacować z góry nasze szanse zwycięstwa. Pierwszy z nas ma szanse $1/2$ *na znalezienie swojego dokumentu, niezależnie od tego jaką strategię dalej przyjmiemy. Więc* $1/2$ *to górne ograniczenie prawdopodobieństwa. Czy możemy zbliżyć się do tej liczby?*

Zuzanna, która do dej pory nie brała udziału w dyskusji, rzuca taką propozycję:

Z naszej dyskusji wynika, że powinniśmy działać tak, żeby wprowadzić jak najsilniejszą ***zależność*** *w naszych wyborach sprawdzanych pudełek. Niech więc każdy postępuje następująco:*

Jednak istnieje idealna stratega

Pierwsze pudełko, które sprawdza każdy wchodzący niech będzie tym, które jest opatrzone jego imieniem i nazwiskiem.

Jednak istnieje idealna stratega

Pierwsze pudełko, które sprawdza każdy wchodzący niech będzie tym, które jest opatrzone jego imieniem i nazwiskiem. Jeśli trafił, tj. znalazł swoją legitymację, to może usiąść i czekać aż zostanie wywołany.

Jednak istnieje idealna stratega

Pierwsze pudełko, które sprawdza każdy wchodzący niech będzie tym, które jest opatrzone jego imieniem i nazwiskiem. Jeśli trafił, tj. znalazł swoją legitymację, to może usiąść i czekać aż zostanie wywołany. Jeśli nie, niech następnie sprawdzi to pudełko, które jest podpisane nazwiskiem osoby, której legitymacja była w pierwszym pudełku.

Jednak istnieje idealna stratega

Pierwsze pudełko, które sprawdza każdy wchodzący niech będzie tym, które jest opatrzone jego imieniem i nazwiskiem. Jeśli trafił, tj. znalazł swoją legitymację, to może usiąść i czekać aż zostanie wywołany. Jeśli nie, niech następnie sprawdzi to pudełko, które jest podpisane nazwiskiem osoby, której legitymacja była w pierwszym pudełku. Niech postępuje tak aż znajdzie swój dokument lub wyczerpie 10 prób.

A teraz trochę matematyki

Zamiast imion i nazwisk użyjmy kolejnych cyfr.

A teraz trochę matematyki

Zamiast imion i nazwisk użyjmy kolejnych cyfr. Umówmy się też, że uczestników gry jest n.

A teraz trochę matematyki

Zamiast imion i nazwisk użyjmy kolejnych cyfr. Umówmy się też, że uczestników gry jest n. Te może mało eleganckie zabiegi pozwalają nam wprowadzić dwa matematyczne narzędzia.

A teraz trochę matematyki

Zamiast imion i nazwisk użyjmy kolejnych cyfr. Umówmy się też, że uczestników gry jest n. Te może mało eleganckie zabiegi pozwalają nam wprowadzić dwa matematyczne narzędzia.

Narzędzie 1: permutacje.

A teraz trochę matematyki

Zamiast imion i nazwisk użyjmy kolejnych cyfr. Umówmy się też, że uczestników gry jest n. Te może mało eleganckie zabiegi pozwalają nam wprowadzić dwa matematyczne narzędzia.

Narzędzie 1: permutacje.

Permutacją nazywamy każde odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne π zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na siebie, tj.

$$\pi\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

A teraz trochę matematyki

Złośliwi studenci starszych lat, którzy pozamieniali legitymacje dokonali więc permutacji (lub przepermutowania) zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

A teraz trochę matematyki

Złośliwi studenci starszych lat, którzy pozamieniali legitymacje dokonali więc permutacji (lub przepermutowania) zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ilość wszystkich takich permutacji to $n!$ a 20! to liczba z 19 cyframi

A teraz trochę matematyki

Narzędzie 2: cykle.

A teraz trochę matematyki

Narzędzie 2: cykle.

Każdą permutację chcemy rozłożyć na mniejsze kawałki.

A teraz trochę matematyki

Narzędzie 2: cykle.

Każdą permutację chcemy rozłożyć na mniejsze kawałki. Cegiełki, z których zbudowane są permutację noszą nazwę cykli.

A teraz trochę matematyki

Narzędzie 2: cykle.

Każdą permutację chcemy rozłożyć na mniejsze kawałki. Cegiełki, z których zbudowane są permutację noszą nazwę cykli.

Formalnie, cykl długości m to taki układ m liczb $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, że:

$$\pi(a_1) = a_2, \pi(a_2) = a_3, \ldots \pi(a_m) = a_1.$$

Przykład

Permutacje wygodnie jest zapisywać w postaci tabeli.

Przykład

Permutacje wygodnie jest zapisywać w postaci tabeli. Dla uproszczenia rozważmy następującą permutację zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

Przykład

Permutacje wygodnie jest zapisywać w postaci tabeli. Dla uproszczenia rozważmy następującą permutację zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Przykład

Permutacje wygodnie jest zapisywać w postaci tabeli. Dla uproszczenia rozważmy następującą permutację zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Permutacja ta składa się z trzech cykli:

Przykład

Permutacje wygodnie jest zapisywać w postaci tabeli. Dla uproszczenia rozważmy następującą permutację zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Permutacja ta składa się z trzech cykli:

$$(1, 3, 2), \quad (4, 6), \quad (5).$$

Przykład

Permutacje wygodnie jest zapisywać w postaci tabeli. Dla uproszczenia rozważmy następującą permutację zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Permutacja ta składa się z trzech cykli:

$$(1, 3, 2), \quad (4, 6), \quad (5).$$

Znając wszystkie cykle permutacji jesteśmy w stanie ją całkowicie odtworzyć.

Związek z naszą grą

Rozważmy najpierw uproszczony przypadek z 6 osobami, które mogą sprawdzić zawartość 3 pudełek.

Związek z naszą grą

Rozważmy najpierw uproszczony przypadek z 6 osobami, które mogą sprawdzić zawartość 3 pudełek. Niech legitymacje będą rozłożone w pudełkach zgodnie z permutacją z poprzedniego slajdu.

Związek z naszą grą

Rozważmy najpierw uproszczony przypadek z 6 osobami, które mogą sprawdzić zawartość 3 pudełek. Niech legitymacje będą rozłożone w pudełkach zgodnie z permutacją z poprzedniego slajdu. Składała się ona z cykli:

$$(1,3,2), \quad (4,6), \quad (5).$$

Związek z naszą grą

Rozważmy najpierw uproszczony przypadek z 6 osobami, które mogą sprawdzić zawartość 3 pudełek. Niech legitymacje będą rozłożone w pudełkach zgodnie z permutacją z poprzedniego slajdu. Składała się ona z cykli:

$$(1, 3, 2), \quad (4, 6), \quad (5).$$

Zatem gracz 1 sprawdza najpierw pudełko nr 1.

Związek z naszą grą

Rozważmy najpierw uproszczony przypadek z 6 osobami, które mogą sprawdzić zawartość 3 pudełek. Niech legitymacje będą rozłożone w pudełkach zgodnie z permutacją z poprzedniego slajdu. Składała się ona z cykli:

$$(1,3,2), \quad (4,6), \quad (5).$$

Zatem gracz 1 sprawdza najpierw pudełko nr 1. Znajduje w nim numer 3, więc sprawdza pudełko nr 3, w pudełku nr 3 jest numer 2

Związek z naszą grą

Rozważmy najpierw uproszczony przypadek z 6 osobami, które mogą sprawdzić zawartość 3 pudełek. Niech legitymacje będą rozłożone w pudełkach zgodnie z permutacją z poprzedniego slajdu. Składała się ona z cykli:

$$(1,3,2), \quad (4,6), \quad (5).$$

Zatem gracz 1 sprawdza najpierw pudełko nr 1. Znajduje w nim numer 3, więc sprawdza pudełko nr 3, w pudełku nr 3 jest numer 2 więc sprawdza pudeło nr 2

Związek z naszą grą

Rozważmy najpierw uproszczony przypadek z 6 osobami, które mogą sprawdzić zawartość 3 pudełek. Niech legitymacje będą rozłożone w pudełkach zgodnie z permutacją z poprzedniego slajdu. Składała się ona z cykli:

$$(1, 3, 2), \quad (4, 6), \quad (5).$$

Zatem gracz 1 sprawdza najpierw pudełko nr 1. Znajduje w nim numer 3, więc sprawdza pudełko nr 3, w pudełku nr 3 jest numer 2 więc sprawdza pudeło nr 2 a w nim znajduje swój indeks.

Związek z naszą grą

Rozważmy najpierw uproszczony przypadek z 6 osobami, które mogą sprawdzić zawartość 3 pudełek. Niech legitymacje będą rozłożone w pudełkach zgodnie z permutacją z poprzedniego slajdu. Składała się ona z cykli:

$$(1, 3, 2), \quad (4, 6), \quad (5).$$

Zatem gracz 1 sprawdza najpierw pudełko nr 1. Znajduje w nim numer 3, więc sprawdza pudełko nr 3, w pudełku nr 3 jest numer 2 więc sprawdza pudeło nr 2 a w nim znajduje swój indeks.

Gracze 4 i 6 znajdują swój indeks za drugim razem,

Związek z naszą grą

Rozważmy najpierw uproszczony przypadek z 6 osobami, które mogą sprawdzić zawartość 3 pudełek. Niech legitymacje będą rozłożone w pudełkach zgodnie z permutacją z poprzedniego slajdu. Składała się ona z cykli:

$$(1,3,2), \quad (4,6), \quad (5).$$

Zatem gracz 1 sprawdza najpierw pudełko nr 1. Znajduje w nim numer 3, więc sprawdza pudełko nr 3, w pudełku nr 3 jest numer 2 więc sprawdza pudeło nr 2 a w nim znajduje swój indeks.

Gracze 4 i 6 znajdują swój indeks za drugim razem, a gracz 5 za pierwszym.

Związek z naszą grą

Wyciągnijmy z powyższego rozumowania dwa wnioski.

Związek z naszą grą

Wyciągnijmy z powyższego rozumowania dwa wnioski.

Wniosek 1. Opis matematyczny gry poprzez permutacje oraz zaproponowanej strategii poprzez cykle działa dla dowolnej liczby graczy i dla dowolnej ilości sprawdzanych pudełek.

Związek z naszą grą

Wyciągnijmy z powyższego rozumowania dwa wnioski.

Wniosek 1. Opis matematyczny gry poprzez permutacje oraz zaproponowanej strategii poprzez cykle działa dla dowolnej liczby graczy i dla dowolnej ilości sprawdzanych pudełek.

Wniosek 2. Stosując podaną strategię grupa zwycięży w grze jeśli permutacja nie posiada cyklu dłuższego niż ilość dozwolonych pudełek do sprawdzenia.

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Musimy poznać liczbę wszystkich "złych" permutacji, czyli tych przy których nasza strategia nie działa.

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Musimy poznać liczbę wszystkich "złych" permutacji, czyli tych przy których nasza strategia nie działa. Zgodnie z wcześniejszym wywodem, są to permutacje, które posiadają cykl długości większej niż $n/2$, a w naszym konkretnym przypadku 10.

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Musimy poznać liczbę wszystkich "złych" permutacji, czyli tych przy których nasza strategia nie działa. Zgodnie z wcześniejszym wywodem, są to permutacje, które posiadają cykl długości większej niż $n/2$, a w naszym konkretnym przypadku 10.

Każda permutacja może mieć tylko jeden tak długi cykl.

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Musimy poznać liczbę wszystkich "złych" permutacji, czyli tych przy których nasza strategia nie działa. Zgodnie z wcześniejszym wywodem, są to permutacje, które posiadają cykl długości większej niż $n/2$, a w naszym konkretnym przypadku 10.

Każda permutacja może mieć tylko jeden tak długi cykl.

Ustalmy ile jest permutacji o cyklu o danej długości, powiedzmy równej k, gdzie $k \geq n/2$.

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Permutacji o cyklu o długości k jest dokładnie tyle, na ile sposobów możemy wybrać k elementów ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, następnie ustawić je w ciąg tworząc cykl i na koniec dowolnie przepermutować pozostałe elementy.

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Permutacji o cyklu o długości k jest dokładnie tyle, na ile sposobów możemy wybrać k elementów ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, następnie ustawić je w ciąg tworząc cykl i na koniec dowolnie przepermutować pozostałe elementy.

Ilustrując to na prostszym przypadku $n = 6$ i $k = 4$ najpierw wybieramy 4 elementy z zakresu 1, $\ldots 6$.

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Permutacji o cyklu o długości k jest dokładnie tyle, na ile sposobów możemy wybrać k elementów ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, następnie ustawić je w ciąg tworząc cykl i na koniec dowolnie przepermutować pozostałe elementy.

Ilustrując to na prostszym przypadku $n = 6$ i $k = 4$ najpierw wybieramy 4 elementy z zakresu 1, $\ldots 6$. Możemy to zrobić na $\binom{6}{4} = 15$ sposobów.

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Permutacji o cyklu o długości k jest dokładnie tyle, na ile sposobów możemy wybrać k elementów ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, następnie ustawić je w ciąg tworząc cykl i na koniec dowolnie przepermutować pozostałe elementy.

Ilustrując to na prostszym przypadku $n = 6$ i $k = 4$ najpierw wybieramy 4 elementy z zakresu 1, $\ldots 6$. Możemy to zrobić na $\binom{6}{4} = 15$ sposobów. Dalej, budujemy z nich cykl, co możemy uczynić na $(4 - 1)! = 6$ możliwości.

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Permutacji o cyklu o długości k jest dokładnie tyle, na ile sposobów możemy wybrać k elementów ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, następnie ustawić je w ciąg tworząc cykl i na koniec dowolnie przepermutować pozostałe elementy.

Ilustrując to na prostszym przypadku $n = 6$ i $k = 4$ najpierw wybieramy 4 elementy z zakresu 1, $\ldots 6$. Możemy to zrobić na $\binom{6}{4} = 15$ sposobów. Dalej, budujemy z nich cykl, co możemy uczynić na $(4 - 1)! = 6$ możliwości. Finalnie, mamy jeszcze $2! = 2$ możliwości na ustawienie pozostałych dwóch elementów.

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Permutacji o cyklu o długości k jest dokładnie tyle, na ile sposobów możemy wybrać k elementów ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, następnie ustawić je w ciąg tworząc cykl i na koniec dowolnie przepermutować pozostałe elementy.

Ilustrując to na prostszym przypadku $n = 6$ i $k = 4$ najpierw wybieramy 4 elementy z zakresu 1, $\ldots$ 6. Możemy to zrobić na $\binom{6}{4} = 15$ sposobów. Dalej, budujemy z nich cykl, co możemy uczynić na $(4 - 1)! = 6$ możliwości. Finalnie, mamy jeszcze $2! = 2$ możliwości na ustawienie pozostałych dwóch elementów. Daje nam to łącznie 180 permutacji o cyklu długości 4.

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Aby odpowiedzieć na postawione pytanie musimy zsumować ilość wszystkich permutacji z cyklem o długości 11, 12, $\ldots$20.

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Aby odpowiedzieć na postawione pytanie musimy zsumować ilość wszystkich permutacji z cyklem o długości 11, 12, ... 20.

Najpierw ustalmy ile jest permutacji z cyklem długości $k > 10$.

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Aby odpowiedzieć na postawione pytanie musimy zsumować ilość wszystkich permutacji z cyklem o długości 11, 12, ... 20.

Najpierw ustalmy ile jest permutacji z cyklem długości $k > 10$. Zgodnie z wcześniejszym rozumowaniem jest ich

$$\binom{20}{k}(k-1)!(20-k)! = \frac{20!}{(20-k)!k!}(k-1)!(20-k)! = \frac{20!}{k}.$$

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Suma wszystkich "złych" permutacji wynosi zatem

$$\sum_{k=11}^{20} \frac{20!}{k}.$$

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Suma wszystkich "złych" permutacji wynosi zatem

$$\sum_{k=11}^{20} \frac{20!}{k}.$$

Więc szansa, że losowo wybrana permutacja jest zła jest równa

$$\frac{\sum_{k=11}^{20} \frac{20!}{k}}{20!} = \sum_{k=11}^{20} \frac{1}{k} \approx 0,67.$$

Obliczamy prawdopodobieństwo wygranej

Suma wszystkich "złych" permutacji wynosi zatem

$$\sum_{k=11}^{20} \frac{20!}{k}.$$

Więc szansa, że losowo wybrana permutacja jest zła jest równa

$$\frac{\sum_{k=11}^{20} \frac{20!}{k}}{20!} = \sum_{k=11}^{20} \frac{1}{k} \approx 0,67.$$

Czyli nasza strategia daje nam szanse zwycięstwa w około co trzecim przypadku.

Literatura

Prezentacja powstała w oparciu o rozdział 2 książki
Jonas Peters, Nicolai Meinhausen, *The raven's hat*, The MIT Press (2021).

Dziękuję za uwagę!