Paradoks - nadzieja na postęp

Jakie to cudowne, że natknęliśmy się na paradoks.
Teraz mamy nadzieję, że dokona się postęp.
- Niels Bohr

Paradoksy są w pewnym sensie jedynie niezwykle sprytnymi łamigłówkami, a w innym są jednymi z najważniejszych zagadek, jakie kiedykolwiek wymyślono.

Paradoksy często pokazują lub przynajmniej sugerują, że nasze najbardziej podstawowe intuicje dotyczące niektórych z naszych najbardziej podstawowych pojęć - w tym prawdy, zbioru, logiki, wiedzy i przekonań - są błędne w takim czy innym sensie.

Duża część matematyki i logiki matematycznej zawdzięcza swoje pochodzenie rozważaniom nad paradoksem kłamcy i paradoksami teorii mnogości.

Paradoks to rodzaj argumentu, który:

(a) zaczyna się od przesłanek, które wydają się bezspornie prawdziwe;

(b) przechodzi przez rozumowanie, które wydaje się bezspornie poprawne;

(c) prowadzi do wniosku, który jest sprzeczny, fałszywy lub w inny sposób absurdalny, niewłaściwy lub niedopuszczalny.

Sprzeczność jest zdaniem, które nie tylko jest fałszywe, ale musi być fałszywe, przy czym gwarantuje to logiczna lub gramatyczna forma tego zdania. Na przykład, każde zdanie postaci:

$$p \text{ i } \mathrm{nie}(\mathrm{p})$$

gdzie p jest jakimkolwiek zdaniem, zaś

$$\mathrm{nie}(\mathrm{p})$$

jest skrótem zdania

nie jest tak, że p,

jest sprzecznością, ponieważ żadne zdanie nie może być jednocześnie prawdziwe i fałszywe.

Podobnie zdanie postaci

$$p \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \mathrm{nie}(\mathrm{p})$$

jest sprzeczne.

Problem z paradoksami zawierającymi sprzeczność polega na fakcie (przynajmniej w większości ujęć logiki i konsekwencji logicznej), że

sprzeczność pociąga za sobą cokolwiek,

tzn., że każde zdanie jest wówczas prawdziwe.

Teoria, która zakłada, że każde stwierdzenie jest prawdziwe, nazywana jest **teorią trywialną**.

Argument, że każda teoria zawierająca sprzeczność jest teorią trywialną, jest prosty. Załóżmy, że mamy sprzeczność postaci:

$$p \quad \text{i} \quad \mathrm{nie}(\mathrm{p}).$$

Skoro prawdziwe jest powyższe zdanie, przwdziwe jest również zdanie p. Biorąc teraz dowolne zdanie q otrzymujemy prawdziwe zdanie

$$p \quad \text{lub} \quad q. \tag{1}$$

Ponieważ jednak prawdziwe jest zdanie

$$\mathrm{nie}(\mathrm{p}), \tag{2}$$

to z (1) i (2) wynika, że prawdziwe jest zdanie q.

Paradoks, od którego zaczniemy, to wersja paradoksu kłamcy. Przypomnijmy Pinokia (drewnianą kukiełkę wyrzeźbioną przez Dżeppetta), który pragnie zostać prawdziwym chłopcem i któremu zawsze rośnie nos, gdy kłamie. Co się stanie, gdy Pinokio powie:

Mój nos będzie rósł!

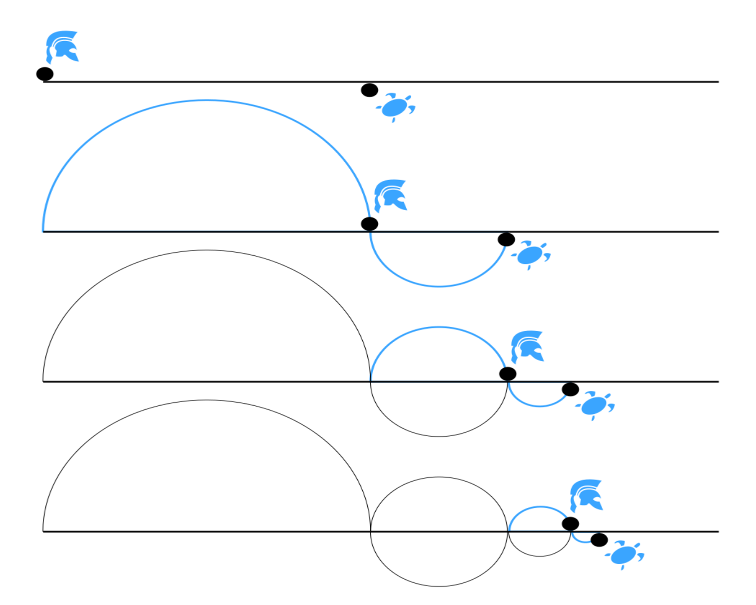
Jeśli Pinokio mówi prawdę, to nos nie będzie mu rósł, ale wtedy to, co właśnie powiedział, jest nieprawdą, co czyni go kłamcą i nos będzie rósł.

Z drugiej strony, jeśli kłamie, to nos będzie mu rósł, ale wtedy to, co powiedział, jest prawdą, czyli oznacza, że jednak nie kłamie i nos nie będzie rósł.

Zatem nos Pinokia będzie rósł i nie będzie rósł! Sprzeczność.

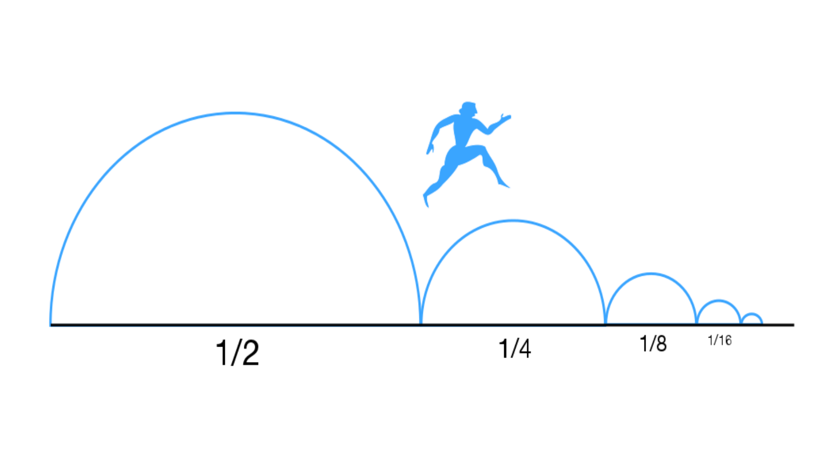
A traz paradoks Achillesa wymyślony przez Zenona z Elei. W paradoksie tym szybkonogi Achilles ma wziąć udział w wyścigu ze znacznie wolniej poruszającym się żółwiem. Aby wyścig był sprawiedliwy żółw zaczyna "biec", a kilka chwil później Achilles rozpoczyna wyścig i stara się złapać żółwia.

Oczywiście to, czy Achilles złapie żółwia, będzie zależeć od wielu czynników, w tym od długości przewagi żółwia, prędkości, z jaką Achilles i żółw mogą biec, oraz długości samego wyścigu. Zenon twierdził jednak, że wszystkie te czynniki są nieistotne. Wręcz przeciwnie, argument Zenona wydaje się pokazywać, że Achilles nigdy nie może złapać żółwia, bez względu na to, jak szybko biegnie.



Rysunek: Achilles i żółw

Argumentacja przebiega następująco: gdy Achilles rozpoczyna wyścig, żółw przebył już pewną odległość na trasie wyścigu. Nazwijmy punkt, w którym znajduje się żółw, gdy Achilles rozpoczyna wyścig, p_1. Pierwszą rzeczą, którą Achilles musi zrobić, aby wyprzedzić żółwia, jest dotarcie do punktu p_1. Zanim jednak dotrze do p_1, żółw, który zawsze się porusza, dotrze do punktu dalej, który nazwiemy p_2. Teraz Achilles musi iść dalej, aby dotrzeć do punktu p_2. Zajmie to trochę czasu (być może bardzo mało czasu, ale nadal będzie to niewielka skończona ilość czasu), a w tym czasie żółw będzie kontynuował ruch, osiągając nowy punkt p_3. Teraz Achilles będzie musiał kontynuować bieg, aby dotrzeć do punktu p_3, ale do tego czasu żółw będzie już w nowym punkcie p_4. Gdy Achilles dotrze do punktu p_4, żółw przejdzie do punktu p_5 i tak dalej. Według Zenona ta sekwencja będzie trwać w nieskończoność, ponieważ za każdym razem, gdy Achilles dotrze do punktu, w którym znajdował się żółw, punkt ten nie będzie już punktem, w którym znajduje się żółw - to znaczy żółw przesunie się nieco dalej. W rezultacie Achilles nigdy nie może złapać żółwia.



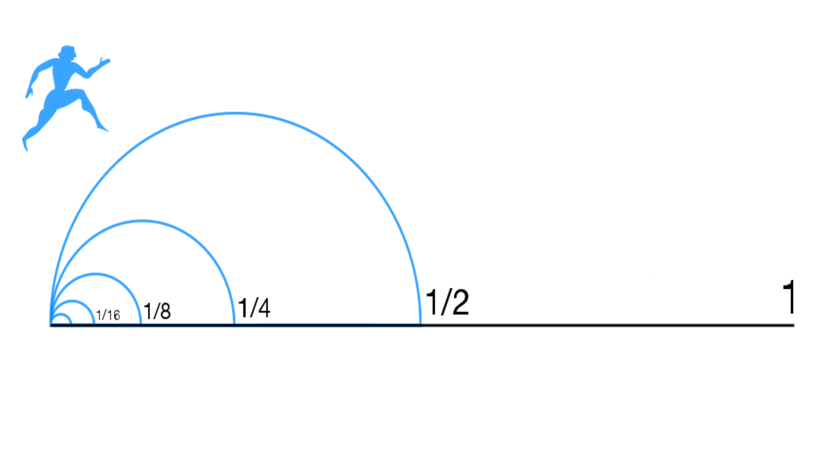
Rysunek: Paradoks biegacza

Paradoks biegacza wg Zenona. Wyobraźmy sobie sportowca, który musi przebiec prostą trasę o długości jednego kilometra. Punkt, w którym zaczyna, nazwiemy 0, punkt, w którym wyścig się kończy, 1, a każdy punkt pomiędzy nimi będzie oznaczony odległością od punktu początkowego. Argument Zenona ma na celu wykazanie, że niemożliwe jest przebiegnięcie jednego kilometra:

- po pierwsze, biegacz musi dotrzeć do punktu środkowego $1/2$ między 0 a 1;
- po osiągnięciu $1/2$, jego następnym zadaniem jest dotarcie do punktu środkowego pozostałej odległości - czyli $3/4 = 1/2 + 1/4$;
- po osiągnięciu $3/4$, biegacz musi dotrzeć do połowy pozostałego dystansu, czyli $7/8 = 1/2 + 1/4 + 1/8$;
- kontynuując ten schemat, musi następnie osiągnąć $15/16$, a następnie $31/32$, a następnie $63/64$. . .

W rezultacie biegacz musi wykonać nieskończenie wiele różnych zadań, aby przebiec od 0 do 1. Ponieważ, według Zenona, nie możemy wykonać nieskończenie wielu zadań, przebiegnięcie jednego kilometra jest niemożliwe.

W innym wariancie paradoksu Zenon pokazuje, że biegacz nawet nie może zacząć ruch, bo aby znaleźć się gdziekolwiek poza punktem startowym 0 musi wykonać nieskończenie wiele zadań, co jest niemożliwe.



W niektórych przedstawieniach paradoksu biegacza [Ajdukiewicz] wniosek w paradoksie jest wyciągany następująco:

„czas potrzebny na przebycie całej drogi równy jest sumie czasów potrzebnych na przebycie wszystkich jej części; czas ten jest więc równy sumie nieskończenie wielu odcinków czasowych, z których każdy ma określone trwanie. Jedmankże, suma nieskończenie wielu odcinków czasowych, z których każdy ma określone (różne od zera) trwanie, jest nieskończenie długa".

Rozwiązanie jest wówczas proste:

"Dla Zenona suma $\frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + \frac{t}{16} + \frac{t}{32} + \ldots$ nie może mieć wartości skończonej. Elementarna teoria nieskończonych szeregów geometrycznych poucza, iż suma, o którą tu chodzi, jest skończona i wynosi t."

Rzeczywiście,

$$\frac{t}{2}+\frac{t}{4}+\frac{t}{8}+\frac{t}{16}+\frac{t}{32}+\ldots$$

jest szeregiem geometrycznym

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots,$$

gdzie $a = t/2$, zaś $q = 1/2$, który ma sumę skończoną, równą

$$\frac{a}{1-q} = \frac{t/2}{1-1/2} = t.$$

Ogólnie, w analizie matematycznej, definiuje się sumę nieskończonej ilości liczb

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots$$

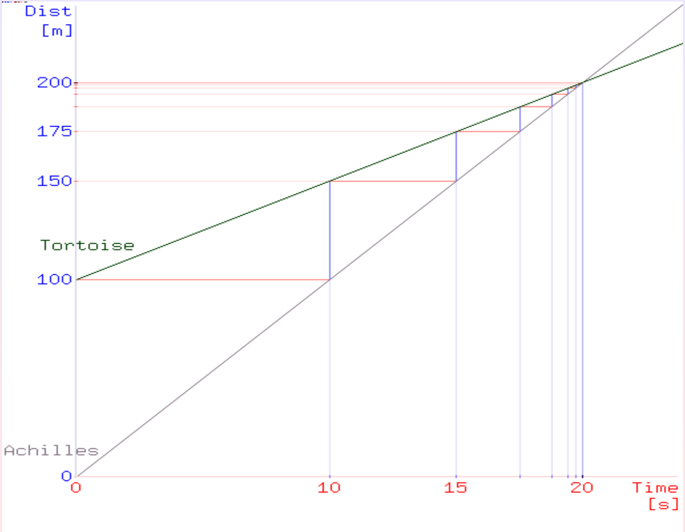
w następujący sposób: tworzymy tzw. ciąg sum częściwych $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\ldots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ &\ldots \end{aligned}$$

i badamy czy jest on zbieżny. Jeśli jest zbieżny, to jego granicę nazywamy sumą szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Podobnie można rozumować w przypadku paradoksu Achillesa i pokazać, że szereg utworzony z czasów, gdy Achilles dogania żółwia sumuje się do skończonej wartości.



Powyższe rozwiązania opierają się na założeniu, że przestrzeń i czas mają strukturę kontinuum, zatem opisują ją liczby rzeczywiste, a więc można korzystać z narzędzi analizy matematycznej. Chociaż prawdą jest, że prawie wszystkie teorie fizyczne zakładają, że przestrzeń i czas rzeczywiście mają strukturę kontinuum, to jednak kwantowe teorie grawitacji sugerują, że tak nie jest.

Nasze przekonanie, że matematyczna teoria nieskończoności opisuje przestrzeń i czas, jest uzasadnione w takim stopniu, w jakim prawa fizyki zakładają, że tak jest, oraz w takim stopniu, w jakim prawa te są potwierdzane przez doświadczenie. Nic nie gwarantuje a priori, że przestrzeń ma strukturę kontinuum.

Jak rozwiązywać paradoksy?

Istnieje szereg strategii, które można zastosować w celu rozwiązania paradoksu.

1. **Strategia odrzucenia przesłanek**. Strategia ta polega na zakwestionowaniu ci najmniej jednej z przesłanek - innymi słowy, można argumentować, że jedna z pozornie niekontrowersyjnych przesłanek jest kontrowersyjna.

2. **Strategia odrzucenia rozumowania**. Strategia ta polega na zakwestionowaniu, że wniosek wynika z przesłanek - innymi słowy, można argumentować, że pozornie niekontrowersyjne rozumowanie jest jednak kontrowersyjne.

3. **Strategia akceptacji wniosku**. Strategia ta polega na zakwestionowaniu, że wniosek jest sprzeczny, fałszywy lub w inny sposób absurdalny lub niewłaściwy - innymi słowy, można zaakceptować rzekomo paradoksalny argument i przyjąć prawdziwość wniosku.

4. **Strategia odrzucenia pojęcia**. Jest to być może najbardziej subtelna strategia polegająca na odrzuceniu jednego lub więcej pojęć zaangażowanych w argument jako pojęcie niespójne lub wadliwe w inny sposób. Wiąże się to oczywiście z odrzuceniem wszelkich przesłanek lub rozumowania, które obejmuje to pojęcie.

Strategia ta różni się od pierwszej i drugiej strategii, ponieważ w tej strategii nie mówimy jedynie, że dana przesłanka jest fałszywa lub że dane rozumowanie jest błędne, ale zamiast tego twierdzimy, że przesłanka lub wnioskowanie jest w jakiś sposób bezsensowne lub niespójne, ponieważ obejmuje bezsensowne lub niespójne pojęcie.

Aby lepiej zrozumieć strategie rozwiązywań paradoksów, przyjrzyjmy się nieco bardziej szczegółowo paradoksowi biegacza. Możemy zrekonstruować argument Zenona w następujący sposób:

($P1$) Przejście od 0 do 1 wymaga wykonania nieskończonej liczby zadań w skończonym czasie.

($P2$) Niemożliwe jest wykonanie nieskończonej liczby zadań w skończonym czasie.

– –

(W) Przejście od 0 do 1 (a zatem ruch w ogóle) jest niemożliwe.

Pierwszą opcją radzenia sobie z tym paradoksem jest przyjęcie strategii odrzucenia przesłanek, argumentując, że albo pierwsza, albo druga przesłanka jest fałszywa. Innymi słowy, możemy poradzić sobie z tym paradoksem, twierdząc, że:

($\sim P1$) przejście od 0 do 1 nie wymaga wykonania nieskończonej liczby zadań w skończonym czasie

lub twierdząc, że

($\sim P2$) możliwe jest wykonanie nieskończonej liczby zadań w skończonym czasie.

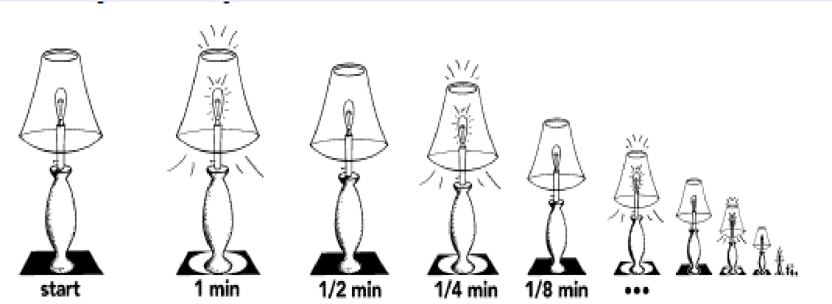
Zauważmy, że jeśli założymy, że przestrzeń jest dyskretna, to przejście od 0 do 1 wymaga wykonania skończonej liczby zadań w skończonym czasie. Zatem zachodzi $(\sim P1)$, czyli przesłanka $(P1)$ jest fałszywa, a to blokuje paradoks biegacza.

Zauważmy, że jeżeli rozumowanie Zenona jest poprawne, tj.

z $(P1)$ i $(P2)$ wynika (W),

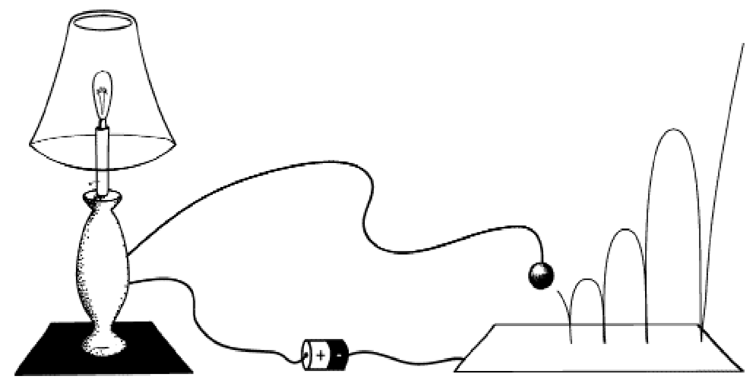
to zaprzeczając wniskowi (W) musimy zaprzeczyć jednemu z założeń. Wydaje się oczywistym, że ruch jest możliwy, czyli, że (W) jest fałszywe. Jeśli więc przyjmiemy, że ruch wymaga wykonanie nieskończonej liczby zadań w skończonym czasie, tj. przyjmiemy $(P1)$, to musimy odrzucić $(P2)$, czyli przyjąć, że możliwe jest wykonanie nieskończonej liczby zadań w skończonym czasie. Sytuacje wymagające wykonania nieskończonej liczby zadań w skończonym czasie nazywane są **super-zadaniami**.

Z super-zadaniami są jednak pewne problemy.

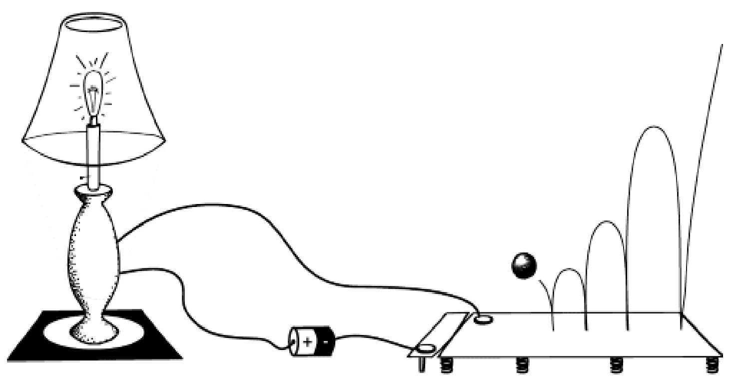


Rysunek: Lampa Thomsona

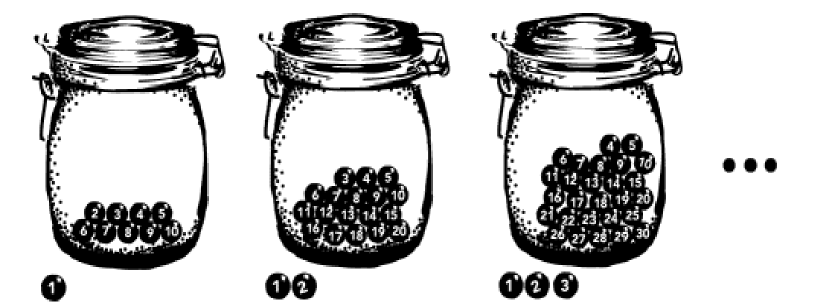
$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = ?$$



Rysunek: Lampa Thomsona - swietlisty koniec



Rysunek: Lampa Thomsona - ciemnisty koniec

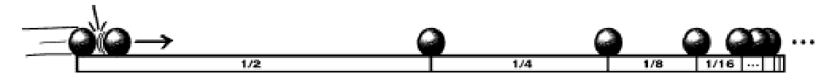


Rysunek: Procedura Littlewooda-Rossa

W n-tym kroku mamy w słoju

$$10 \cdot n - n = 9 \cdot n$$

kul.



Rysunek: Super-zadanie Laraudogoitego

Kolejną opcją radzenia sobie z paradoksem biegacza jest przyjęcie strategii odrzucenia rozumowania. Najpierw musimy określić logiczną strukturę argumentu.
W naszym przedstawieniu paradoksu ma on formę:

p pociąga za sobą q

Nie jest możliwe, że q

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Nie jest możliwe, że p,

gdzie:
p = Biegacz może poruszać się od 0 do 1.
q = Biegacz może wykonać nieskończenie wiele zadań w skończonym czasie.

Ustalmy jak rozumiemy stwierdzenie:

$$\Omega \text{ pociąga za sobą } \Theta.$$

Jeśli relację łączącą p i q jest tutaj tzw. implikacja materialna, tj.:

$$\text{Jeśli zachodzi } \Omega \text{, to zachodzi również } \Theta,$$

co jest (w logice klasycznej) równoważne z:

$$(\text{nie } \Omega) \quad \text{lub} \quad \Theta,$$

to argument Zenona byłby nieprawidłowy:

(Nie jest możliwe, że Θ) pociąga za sobą (nieΘ)

(nieΘ) oraz [(nie Ω) lub Θ] pociąga za sobą (nieΩ)

jednak

(nieΩ) nie pociąga za sobą (nie jest możliwe, że Ω)

bo np.

(nie jest tak, że ta prelekcja jest prowadzona interesująco)

nie pociąga za sobą

(nie jest możliwe, żeby ta prelekcja była prowadzona interesująco

Zenon wyraźnie chce, aby pierwsza przesłanka była rozumiana jako twierdzenie, że przejście od 0 do 1 (lub jakikolwiek ruch) **musi** obejmować wykonanie nieskończenie wielu zadań w skończonym czasie. Innymi słowy, najlepszym sposobem na zrozumienie pierwszej przesłanki jest coś w rodzaju:

Konieczne jest, że jeśli zachodzi Ω, to zachodzi również Θ.

Jeśli rozumiemy pierwszą przesłankę w ten sposób, to rozumowanie jest poprawne - przynajmniej przy standardowym rozumieniu konieczności i możliwości:

Konieczne jest, że jeśli zachodzi Ω, to zachodzi również Θ

Nie jest możliwe, że Θ

— — — — — — — — — — — — —

Nie jest możliwe, że Ω,

Co więcej, nie wydaje się, aby istniały jakiekolwiek powody, aby sądzić, że w omawianym przypadku jest coś złego w tym rozumowaniu (przynajmniej bardzo niewielu myślicieli obwiniało ten schemat rozumowania za zagadkową naturę paradoksu Zenona).

Trzecia opcja - strategia akceptacji wniosku - jest również nieatrakcyjna w tym konkretnym przypadku. W końcu ruch jest możliwy i wydaje się, że codziennie wykonujemy zadania podobne do tego, którego podjął się biegacz.

Czwarta opcja - strategia odrzucenia pojęcia - była zaproponowana przez Arystotelesa. Arystoteles zauważył, że paradoks biegacza opiera się na założeniu, że możemy myśleć o odcinku od 0 do 1 jako zbudowanego z nieskończenie wielu odrębnych elementów. Arystoteles zaprzeczył temu, rozróżniając zbiory potencjalnie nieskończone od zbiorów aktualnie nieskończonych.

Potencjalnie nieskończony zbiór to zbiór, który zawsze można rozszerzyć poprzez dodanie nowych elementów. Zatem potencjalnie nieskończony zbiór jest skończony w dowolnym momencie (lub na dowolnym „etapie" jego konstrukcji), ale w pewnym sensie jest nieograniczony, ponieważ zbiór zawsze można rozszerzyć na większy (choć wciąż skończony) zbiór.

Aktualnie nieskończony zbiór to zbiór, który zawiera nieskończenie wiele elementów naraz. Arystoteles argumentował, że odcinek między 0 a 1 w paradoksie biegacza oraz zbiór części, na które można podzielić ten odcinek, jest potencjalnie, ale nie aktualnie nieskończony. Arystoteles argumentował, że nigdy nie może być żadnego aktualnie nieskończonego zbioru.

Arystoteles argumentował, że odcinek między 0 a 1 można dzielić na coraz więcej (ale zawsze skończenie wielu) odcinków, ale nie jest ona z góry podzielony na wszystkie nieskończenie wiele części w sposób, który sugeruje Zenon. W rezultacie Arystoteles odrzucił pierwszą przesłankę argumentacji Zenona, gdyż odrzucił koncepcję aktualnie nieskończonych zbiorów. W terminologii, którą właśnie wprowadziliśmy, Arystoteles przyjął rozwiązanie polegające na strategii odrzucenia pojęcia, odrzucając pojęcie aktualnej nieskończoności.

Wydaje się zatem, że najsensowniejszą odpowiedzią na paradoks biegacza jest odrzucenie jednej z przesłanek, gdyż rozumowanie przeprowadzone w paradoksie jest poprawne, przyjęcie wniosku płynącego z paradoksu jest wyraźnie absurdalne, zaś rozumienie niskończoności, tak jak to proponuje Arystoteles, nie znajduje dzisiaj zwolenników.

Reasumując, jedynie strategia odrzucenia przesłanki wydaje się być tutaj owocna.

Natomiast w paradoksie Pinokia lub jego bardziej znanej formie, paradoksie kłamcy:

To zdanie jest fałszywe

każda ze strategi przynosi interesujące i zajmujące wielu badaczy propozycje rozwiązań. Ale to już dłuższa historia na inną okazję.

Źródła:

1. Roy T. Cook - Paradoxes,
2. K. Ajdukiewicz - Zmiana i sprzeczność,
3. Wikipedia,
4. Stanford Encyclopedia of Philosophy

Dziękuję za uwagę