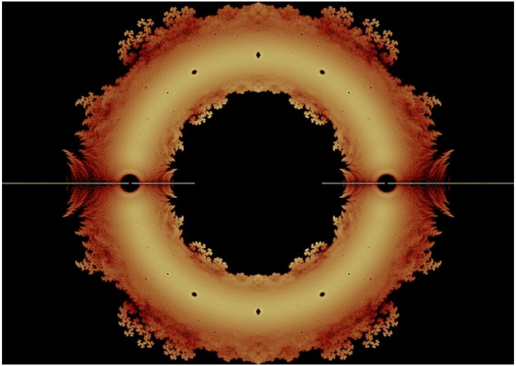
# Ranking drużyn sportowych

## czyli jak ustalić, który z klubów piłkarskich jest najlepszy?


Wojciech Kryszewski

Politechnika Łódzka


Spotkania z Matematyką Stosowaną – 11.10.2022



*Matematyka użyteczna jest piękna,*

*a piękna matematyka jest użyteczna...*

# Rankingi i Ratingi

**Rating** (czyli **ocena**) i **ranking** to podobne pojęcia, ale nie są wymienne.

Oto podsumowanie różnic między tymi pojęciami w ankietach badawczych.

• W **ratingu** chodzi o przypisanie oceny, ze względu na określone kryteria. Tę samą ocenę można przypisać więcej niż jednemu elementowi.

W oparciu o takie oceny sporządza się **standing**, czyli zestawienia ocen.

• W **rankingu** chodzi o uporządkowanie ocenianych elementów, zwykle według określonych preferencji.

Tylko jeden element może zajmować każdą pozycję, więc oceniający musi dokładnie przemyśleć i wybrać, który z nich zajmie pierwsze, drugie itd. miejsce.

## Rating

**Rating**, czyli ilościowa ocena, wynika na ogół ze spełnienia określonych kryteriów i prowadzi do zestawienia.
To z kolei, na ogół, prowadzi do sporządzenia rankingu, czyli kolejności.

Ale czy zawsze uzyskany ranking jest miarodajny? To zależy od metody ratingowej.

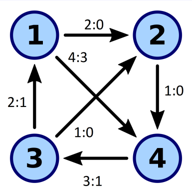
## Ranking

W wielu sytuacjach **ranking** jest efektem, niekiedy wielopłaszczyznowych porównań lub rywalizacji.

Która pralka jest lepsza:

- ładna, lecz energochłonna, czy
- brzydka, lecz energooszczędna?

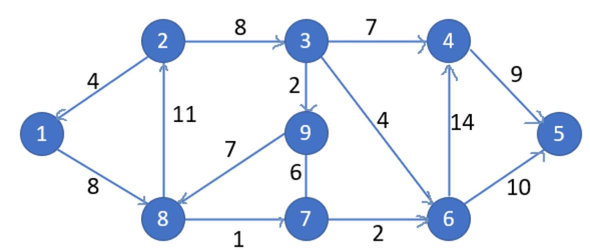
## Turniej 4 drużyn piłki nożnej




Kierunek strzałki informuje która drużyna wygrała, a etykieta informuje jaki był wynik rywalizacji. Przykładowo: drużyna 3 wygrała z drużyną 4 zdobywając 3 bramki, a tracąc 1 bramkę.

Która z drużyn jest najlepsza? Rozstrzygnięcie nie jest bynajmniej proste.

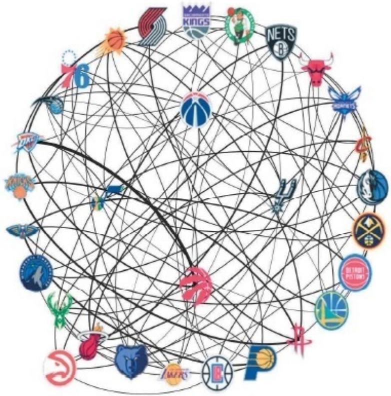
## Turniej 9 drużyn koszykówki




Kierunek strzałki informuje która drużyna wygrała, a etykieta informuje o liczbie oddanych zdobytych punktów (np. drużyna 2 straciła 4 punkty w rywalizacji z drużyną 1).

Która z drużyn jest najlepsza?.

# NBA




Graf pierwszych trzech dni zmagań NBA w sezonie 2018-2019

## Jak oceniane są drużyny sportowe?

Większość sportów wykorzystuje systemy ratingowe oparte na założeniu, że za każdy mecz drużyna zdobywa określoną liczbę punktów w zależności od ich wyników (np. 2 punkty zwycięstwo, 1 remis, 0 przegrana).

**Najprostszy ranking** drużyn opiera się wtedy na całkowitej liczbie punktów, które zgromadzili w trakcie sezonu.


Taki ranking jest, na ogół, niesprawiedliwy.

# Turniej szachowy

szachowy.jpg

- *Zwycięstwo 1 pkt;*
- *przegrana 0 pkt;*
- *remis 1/2 pkt.*

6 zawodników: A, B, C, D, E i F. Oto wyniki:

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | Uzyskany wynik |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | $4\frac{1}{2}$ |
| $B$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 1 | 0 | $2\frac{1}{2}$ |
| $C$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 1 | 1 | $4\frac{1}{2}$ |
| $D$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $1\frac{1}{2}$ |
| $E$ | 0 | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $2\frac{1}{2}$ |
| $F$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $2\frac{1}{2}$ |

szachowy.jpg

Zauważmy, że:

- Zawodnik D (najgorszy) wygrał A (najlepszym);
- Wynik uzyskany przez D nie uwzględnia wartości pokonanych przeciwników;
- A i C uzyskali tę sama liczbę punktów, choć A wygrał z C.

**Konkluzja**

Czy raczej nie należy porównywać zawodników parami i na tej podstawie ustalać sprawiedliwszy (?) rating, a – na jego podstawie – lepszy ranking?

# NBA Ranking Most Valuable Player

| Season | Most Valuable Player | Ranking |
| --- | --- | --- |
| 1991-92 | Michael Jordan | 1 |
| 1992-93 | Charles Barkley | 5 |
| 1993-94 | Hakeem Olajuwon | 2 |
| 1994-95 | David Robinson | 1 |
| 1995-96 | Michael Jordan | 1 |
| 1996-97 | Karl Malone | 1 |
| 1997-98 | Michael Jordan | 5 |
| 1999-00 | Shaquille O'Neal | 1 |
| 2000-01 | Allen Iverson | 13 |
| 2001-02 | Tim Duncan | 1 |
| 2002-03 | Tim Duncan | 1 |
| 2003-04 | Kevin Garnett | 1 |
| 2004-05 | Steve Nash | 15 |
| 2005-06 | Steve Nash | 10 |
| 2006-07 | Dirk Nowitzki | 3 |
| 2007-08 | Kobe Bryant | 5 |

Nie zawsze „najbardziej wartościowy zawodnik"jest pierwszy w rankingu!

# Porównania parami i rankingi

• Zestawienia (standings): zestawienie ocenianych obiektów z punktu widzenia określonego kryterium: np. spożycie kawy lub czytelnictwo książek w krajach Europy itp. (Uwaga: konieczność normalizacji).

Zestawienia dają zawsze porządek liniowy: $A \geqslant B \geqslant C \geqslant ....$

Może mieć charakter uśrednienia: rankingi wielokryterialne (np. ranking liceów).

• Porównania parami: Analiza porównawcza obiektów wg. określonych preferencji (np. która z dwóch pralek jest lepsza?)

Zwykle brak porządku liniowego (występowanie „cykli"): kamień > nożyce > papier > kamień

**Ranking porównawczy**

Mając analizę porównawcze dokonujemy „wartościowania" i szukamy metod stworzenie rankingu możliwie dokładnie odzwierciedlającego uzyskane rezultaty analizy porównawczej.

- M. Kendall i B. Babington Smith, 1939: analiza obiektów z punktu widzenie pewnej cechy, np. „urody'' (*paired comparison*); tworzy się macierz preferencji i sumuje wiersze. Tę metodę zastosowaliśmy poprzednio tworząc ranking szachowy.
- J. Seeley, 1949: analiza porównawcza, lecz osądy są ważone (przecież obiekt może być „znacznie ładniejszy'' lub wynik meczu (a nie tylko kto wygrał) powinien się liczyć. Jak to zrobić?
- T. Wei, L. Katz, 1953: pierwsza odpowiedź na to pytanie, pierwsze użycie twierdzenia Perrona-Frobeniusa.

# Ranking spektralny

- James Keener 1993: pierwsze zastosowania algebry liniowej i twierdzenia Perrona Frobeniusa do tworzenia rankingów sportowych (liga, rozgrywki pucharowe, rywalizacja)

Przypuśćmy, że ustalamy ranking $n$ rywalizujących drużyn, które będziemy oznaczać $\boxed{i}$, $\boxed{j}$ , gdzie $i, j = 1, 2, ..., n$.

Metoda Keenera opiera się na następujących założeniach:

### Założenia w metodzie Keenera

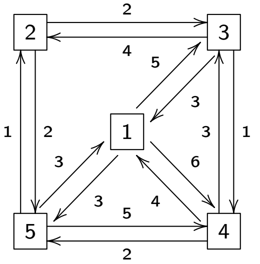
- Każdej drużynie $\boxed{i}$ należy przypisać wartość $w_i > 0$ odzwierciedlającą jej osiągnięcia w danym sezonie (rating);
- wartość $w_i$ drużyny $\boxed{i}$ zależy od wartości drużyn, z którymi rywalizowała i od wyników: więcej znaczy zwycięstwo nad silnym przeciwnikiem lub urwanie punktów silnej drużynie nawet w przegranym meczu;
- zestawienie wartości $w_i$, dla $i = 1, 2, ..., n$, od największego do najmniejszego daje pożądany ranking.

# Przykład $n=5$

Mamy 5 rywalizujących drużyn $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$.

Każdej z nich mamy przypisać wartość $w_1, w_2 ..., w_5$ (czyli dokonać ratingu, będącego podstawę do rankingu).

- Strukturę rywalizacji ilustruje następujący tzw. graf połączeń




Obecność strzałki $\boxed{j} \xrightarrow{k} \boxed{i}$ oznacza, że drużyna $\boxed{j}$ w rywalizacji z drużyną $\boxed{i}$ straciła (łącznie) $k$ punktów.

Na przykład $\boxed{2} \xleftarrow{4} \boxed{3}$ oznacza, że drużyna $\boxed{3}$ straciła 4 punkty z drużyną $\boxed{2}$.

Uwaga: Brak strzałki oznacza, że brak było spotkania.

## Wartość drużyny

Przypuśćmy, że wartości $w_1, \ldots, w_5$ są już dane i ustalmy drużynę $\boxed{i}$.

- Jej wartość $w_i$ względem drużyny $\boxed{j}$ wynosi

$$w_{ij} = a_{ij} w_j,$$

gdzie $a_{ij}$ jest miarą sukcesu $\boxed{i}$ w rywalizacji z $\boxed{j}$ odzwierciedlającą wynik, stracone lub uzyskane punkty itp.
Mierząc względną siłę $w_{ij}$ bierzemy pod wartość rywala! Im większe jest $a_{ij}$, tym bardziej wartość drużyny $\boxed{i}$ zależy od wartości drużyny $\boxed{j}$.

- Zatem wartość drużyny $\boxed{i}$

$$w_i = w_{i1} + w_{i2} + w_{i3} + w_{i4} + w_{i5} =$$

$$= a_{i1} w_1 + a_{i2} w_2 + a_{i3} w_3 + a_{i4} w_4 + a_{i5} w_5 = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} w_j,$$

jest więc sumą wszystkich względnych wartości zdobytych w rywalizacji z pozostałymi drużynami.

- Mamy więc układ 5 równań z niewiadomymi $w_1,...,w_5$.

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + a_{13}w_3 + a_{14}w_4 + a_{15}w_5 \\ w_2 = a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + a_{23}w_3 + a_{24}w_4 + a_{25}w_5 \\ w_3 = a_{31}w_1 + a_{32}w_2 + a_{33}w_3 + a_{34}w_4 + a_{35}w_5 \\ w_4 = a_{41}w_1 + a_{42}w_2 + a_{43}w_3 + a_{44}w_4 + a_{45}w_5 \\ w_5 = a_{51}w_1 + a_{52}w_2 + a_{53}w_3 + a_{54}w_4 + a_{55}w_5. \end{cases}$$

A zapisie macierzowym $\boxed{Aw = w}$

- Jeśli rozwiążemy ten układ, tzn. znajdziemy wartości $w_1, w_2, w_3, w_4$ i $w_5$ oraz ustawimy je w porządku malejącym, to otrzymamy ranking.

**Jak wybrać wartość $a_{ij}$?**

Wybór macierzy referencji lub miar sukcesu $a_{ij}$, $i,j = 1,...,5$, jest ważnym problemem. Wrócimy do niego później.

Macierz stanowi wygodny sposób zapisu różnych danych

**Przykład**

Trzech uczniów $s_1, s_2, s_3$ uczestniczy w czterech klasówkach 1,2,3,4. Następująca macierz opisuje otrzymane wyniki (stopnie):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Podobną macierz można sporządzić, gdy studentów jest $n$, zaś sprawdzianów $m$.

Ogólnie mówiąc macierzą $(n \times m)$ (macierzą o $n$ wierszach i $m$ kolumnach), gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, nazwiemy wyrażenie (tablicę)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{i=\mathbf{1},\dots,n \\ j=\mathbf{1},\dots,m}};$$

gdzie liczba $a_{ij} \in \mathbb{R}$ stoi w $i$-tym wierszu i $j$-tej kolumnie, $1 = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

- Macierz jest kwadratowa, gdy $n = m$;
- Macierz jest dodatnia lub nieujemna $a_{ij} > 0$ lub $a_{ij} \geqslant 0$ dla wszystkich $i, j$.
- Wśród macierzy kwadratowych ważną rolę pełni tzw. macierz jednostkowa

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

# Wektory

Szczególnym przypadkiem są $n$-wymiarowe wektory, tzn. macierze o $n$-wierszach i jednej kolumnie, a więc wymiaru $(n \times 1)$:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Piszemy też czasem $x = [x_1, ..., x_n]^T$ pamiętając, że wektory mają zawsze postać kolumnową.

- Wektor jest dodatni lub nieujemny: $x_i > 0$ $(x_i \geqslant 0)$ dla wszystkich $i$.

# Działania na macierzach

- Macierze tych samych wymiarów można dodawać lub odejmować: jeśli

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}, \quad B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}},$$

to sumą lub różnicą jest macierz $(m \times n)$

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

- Macierze można mnożyć przez liczby: jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$, to

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}.$$

- Przykładowo (przy $n = m$)

$$\lambda I_n = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

W szczególności, jeśli $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ są wektorami, to

$$\lambda x = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$$

oraz

$$x \pm y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{bmatrix}$$

Macierze $A, B$ wymiarów $(n \times m)$ oraz $(m \times k)$ można też mnożyć przez siebie; w wyniku powstanie tzw. iloczyn Cauchy'ego, tj. macierz $A \cdot B$ wymiaru $(n \times k)$.

- W szczególności, dla macierzy kwadratowej (czyli wymiaru $(n \times n)$) można mówić o potęgowaniu macierzy: dla $k \geqslant 0$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot .... \cdot A}_{k}; \quad A^0 = I_n.$$

Będzie to również macierz $(n \times n)$.

- Niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Wynikiem mnożenia macierzy $A$ przez $x$ (w tej kolejności) jest wektor

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = A \cdot x$$

(piszemy też $Ax$), gdzie

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m, \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m, \end{cases}$$

tzn.

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Niech $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ (macierz kwadratowa).

• Liczba rzeczywista $\lambda \in \mathbb{R}$ jest rzeczywistą wartością własną macierzy $A$, jeśli istnieje wektor $x \neq 0$ taki, że

$$Ax = \lambda x.$$

Taki wektor nazywa się wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\lambda$.

• Jeśli $x$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\lambda$, to dla dowolnej liczby $\beta \in \mathbb{R}$, wektor $\alpha x$ jest również wektorem własnym o tej samej wartości własnej

$$A \cdot \beta x = \beta A \cdot x = \beta \lambda x = \lambda \beta x.$$

• Tej samej wartości własnej mogą odpowiadać różne wektory własne (nie związane ze sobą w wyżej omówiony sposób).

Zauważmy, że dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ i wektora $x$

$$Ax = \lambda x \iff (A - \lambda I_n) \cdot x = 0$$

oraz

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Równość $(A - \lambda I_n)x = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_1 & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22} - \lambda)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0. \end{cases}$$

• Liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną macierzy $A \iff$ układ równań ma niezerowe rozwiązanie, tzn. istnieją liczby $x_1,\ldots,x_n$ ($x_i \neq 0$ dla jakiegoś $i$) spełniające układ (wektor $x=[x_1,\ldots x_n]$ będzie wektorem własnym).

• Twierdzenie Kroneckera-Capelliego mówi, że układ ma rozwiązanie niezerowe $\iff$ wyznacznik $\det(A-\lambda I_n)$ jest równy zero.

• Definicję wyznacznika macierzy można znaleźć w każdym podręczniku tzw. algebry liniowej. Dla przykładu

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Chcąc znaleźć (rzeczywiste) wartości własne macierzy $A$ trzeba rozwiązać (względem niewiadomej $\lambda$) równanie

$$\det(A-\lambda I_n) = 0.$$

To jest często skomplikowane (szczególnie, gdy $n$ jest dużą liczbą).

Są też inne metody.

Nie każda macierz ma rzeczywiste wartości własne.

## Przykład

Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

nie ma rzeczywistych wartości własnych: $\sigma_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

Rzeczywiście

$$\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2.$$

Równanie $\lambda^2 + 2 = 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych (są dwa pierwiastki zespolone $\pm i\sqrt{2}$) .

*Macierz ma zawsze wartości własne, ale mogą to być liczby zespolone, które nas obecnie nie interesują.*

# Promień spektralny

Dla macierzy $A=[a_{ij}]$, dla których $\sigma_{\mathbb{R}}(A)\neq\emptyset$ określa się tzw. (rzeczywisty) promień spektralny

$$r(A)=\max\{|\lambda| \mid \lambda\in\sigma_{\mathbb{R}}(A)\}.$$

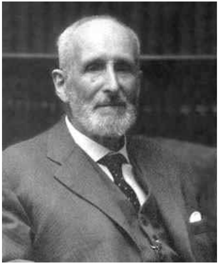
## Przykład

Dla macierzy

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I_2)=\det\left(\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$
$$=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & -2\\ 1 & -2-\lambda\end{bmatrix}=\lambda+\lambda^2.$$

Zatem wartości własne są pierwiastkami równania $\lambda^2+\lambda=0$, tj. $\sigma_{\mathbb{R}}(A)=\{0,-1\}$. W konsekwencji promień spektralny $r(A)=1$.



Oskar Perron
(1880 – 1975)

Georg Frobenius
(1849 – 1917)

### Twierdzenie (Perrona)

*Jeśli macierz kwadratowa $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ jest nieujemna, to:*

- *zbiór rzeczywistych wartości własnych jest niepusty: $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$;*
- *oraz promień spektralny jest (rzeczywistą) wartością własną, tzn. $r(A) \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$, której odpowiada nieujemny wektor własny $x = [x_1, \dots, x_n]$, tzn.*

$$Ax = r(A)x.$$

Wadą twierdzenie Perrona jest to, że wektor własny $x$ odpowiadający promieniowi spektralnemu nie jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do czynnika rzeczywistego).

# Macierze nieredukowalne

G. Frobenius wprowadził pojęcie macierzy nieredukowalnej.

- Macierz $A$ wymiaru $(n \times n)$ jest nieredukowalna, gdy $A \geqslant 0$ i $(I_n + A)^{n-1} > 0$.

- Fakt: Macierze dodatnie są nieredukowalne.

**Twierdzenie Perrona-Frobeniusa**

Jeśli macierz kwadratowa $A$ wymiaru $(n \times n)$ jest nieujemna i nieredukowalna, to

- $\sigma_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$,
- promień spektralny $r(A) \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$, jest więc wartością własną,
- odpowiada mu dodatni wektor własnym $x$,
- istnieje dokładnie jeden dodatni stochastyczny wektor własny $x = [x_1, ..., x_n]$ tzn. taki, że $x_i > 0$ dla $i = 1, ..., n$, $x_1 + ... + x_n = 1$ oraz $Ax = r(A)x$.

Dodatkowo, jeżeli pewnej wartości własnej $\mu \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$ odpowiada nieujemny wektor własny, to $\mu = r(A)$.

# Macierze stochastyczne

- Macierz nieujemna $A = [a_{ij}]_{i,j=1,...,n}$ jest (kolumnowo) stochastyczna, gdy suma współczynników z każdej kolumny jest równa 1, tzn. dla dowolnego $j = 1,...,n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

**Przykład**

Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

jest (kolumnowo) stochastyczna.

Jeśli macierz $A$ jest (kolumnowo) stochastyczna, to $r(A) = 1$.

# Kluczowy fakt

**Wniosek**

Niech macierz $A$ będzie stochastyczna i nieredukowalna. Wtedy

- $r(A) = 1 \in \sigma_{\mathbb{R}}(A)$,
- istnieje dokładnie jeden dodatni stochastyczny wektor własny $x = [x_1, ..., x_n]$ tzn. taki, że

$$\boxed{(1)\ Ax = x, \quad (2)\ x_1 + ... + x_n = 1, \quad (3)\ x_i > 0\ i = 1, ..., n.}$$

Dodatkowo metoda potęgowa pozwala wyliczyć

$$x = \frac{1}{k} \lim_{k \to \infty} A^k \cdot e,$$

gdzie $e = [1, 1, ..., 1]$. Szybkość tej zbieżności można dokładnie oszacować ([a]).

[a] Każdy wektor postaci $\lambda x$, gdzie $\lambda > 0$ bedzie dodatnim, ale już nie stochastycznym, wektorem własnym odpowiadającym $r(A)$.

Twierdzenie Perrona-Frobeniusa wraz powyższym wnioskiem pozwala na

- znalezienie dodatniego stochastycznego wektora własnego

dla nieredukowalnej, nieujemnej macierzy stochastycznej przy pomocy (jeśli jest taka potrzeba) zbieżnej i stabilnej metody numerycznej (metody „potęgowej”). Jest on wyznaczony jednoznacznie.

**Przykład**

Dla macierzy stochastycznej

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

z poprzedniego przykładu obliczamy

$$x = [1/4, 3/8, 3/8].$$

## Podstawowe równanie

- Mamy więc układ n równań z niewiadomymi $w_1, \dots, w_5$

$$\begin{cases} w_1 = & a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \dots + a_{1n}w_n \\ w_2 = & a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{2n}w_n \\ & \vdots \\ w_n = & a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \dots + a_{nn}w_n. \end{cases}$$

Czyli $w = Aw$, gdzie wektor wartości $w$ i macierz preferencji $A$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Mamy więc równanie macierzowe

$$Aw = w,$$

gdzie poszukiwany jest wektor wartości $w$, czyli wektor własny macierzy preferencji $A$ odpowiadający wartości własnej 1.

- Można go znaleźć, o ile $A$ jest macierzą nieujemną, nieredukowalną i stochastyczną wykorzystując twierdzenie Perrona-Frobeniusa, które gwarantuje istnieje i jednoznaczność takiego dodatniego wektora.

- Kluczowa jest poprawna konstrukcja macierzy preferencji $A$, tzn. jej współczynników $a_{ij}$, $i,j = 1,...,n$.

# Macierz preferencji $A$

- (Win-Loose) $a_{ij} = l_{ij} + \frac{1}{t_{ij}}2$, gdzie $l_{ij}$ liczba wygranych drużyny $\boxed{i}$ z drużyną $\boxed{j}$, zaś $t_{ij}$ jest liczbą zremisowanych spotkań;
- (Keener) $a_{ij} = \frac{k_{ij}}{k_{ij}+k_{ji}}$, gdzie $k_{ij}$ jest liczbą punktów zdobytych przez drużynę $\boxed{i}$ w spotkaniach z drużyną $\boxed{j}$;
- (Keener) Oznaczmy przez $b_{ij}$ liczbę punktów jakie drużyna $\boxed{j}$ straciła w meczu (meczach) z drużyną $\boxed{i}$ oraz niech

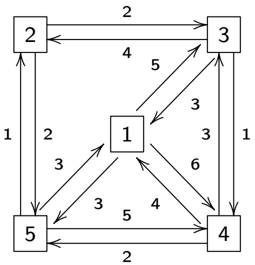
$$c_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij};$$

jest to liczba punktów, które drużyna $\boxed{j}$ straciła w meczach z pozostałymi drużynami. Wreszcie przyjmuje się

$$\boxed{a_{ij} = \frac{b_{ij}}{c_j}}$$

Tak skonstrowana macierz $A$ jest stochastyczna i (na ogół) nieredukowalna.

# Przykład




Przypomnijmy, że strzałka $\boxed{a} \xrightarrow{k} \boxed{b}$ oznacza, że drużyna $\boxed{a}$ w rywalizacji z drużyną $\boxed{b}$ straciła (łącznie) $k$ punktów.

$$[b_{ij}] = \begin{array}{c} \\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \\ \boxed{5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3/8 & 4/9 & 3/9 \\ 0 & 0 & 4/8 & 0 & 1/9 \\ 5/14 & 2/4 & 0 & 3/9 & 0 \\ 6/14 & 0 & 1/8 & 0 & 5/9 \\ 3/14 & 2/4 & 0 & 2/9 & 0 \end{bmatrix}$$

# Wynik

Wartości własnej $1 = r(A)$ odpowiada wektor własny

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} \end{array} \\ \textit{wartosc} & \begin{bmatrix} 1{,}44 & 0{,}79 & 1{,}35 & 1{,}34 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Stąd wynika nieco zaskakujący ranking

$\boxed{I.1}$ $\boxed{II.3}$ $\boxed{III.4}$ $\boxed{IV.5}$ $\boxed{V.2}$

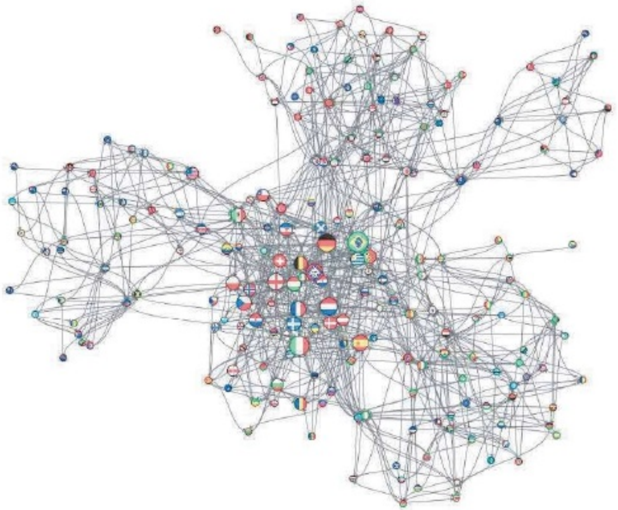
- Sprawa doboru macierzy jest (i bywa) dyskusyjna. To trzeba przemyśleć...
- Wyliczenie wektorów własnych nie jest prostym zadaniem. Trzeba się naliczyć. Skorzystałem z gotowego oprogramowania online pod adresem:

https://www.emathhelp.net/calculators/linear-algebra/eigenvalue-and-eigenvector-calculator/

Kalkulator wartości i wektorów własnych

# Ranking narodowych drużyn piłki nożnej

| # | COUNTRY | SPEC RANK | OFFICIAL |
|---|---|---|---|
| 1 | Brazil | 0.040375 | 1 |
| 2 | Italy | 0.037992 | 3 |
| 3 | Germany | 0.033801 | 2 |
| 4 | Netherlands | 0.031052 | 8 |
| 5 | Argentina | 0.029159 | 4 |
| 6 | England | 0.029100 | 6 |
| 7 | Spain | 0.027904 | 5 |
| 8 | France | 0.025670 | 7 |
| 9 | Czechoslovakia | 0.025155 | NA |
| 10 | Sweden | 0.022882 | 10 |
| 11 | Mexico | 0.022034 | 13 |
| 12 | Hungary | 0.022014 | 16 |
| 13 | Uruguay | 0.020660 | 9 |
| 14 | Belgium | 0.020255 | 14 |
| 15 | Portugal | 0.020211 | 17 |
| 16 | Poland | 0.019528 | 15 |
| 17 | Denmark | 0.019206 | 25 |
| 18 | Croatia | 0.018993 | 27 |
| 19 | Switzerland | 0.016650 | 21 |
| 20 | Yugoslavia | 0.016466 | NA |



# Ranking uniwersyteckiej ligi koszykówki USA (przykład 5 drużyn)

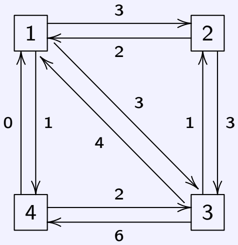
| | Duke | Miami | UNC | UVA | VT | Liczba zw. | Różnica punktów |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Duke | | 7-52 | 21-24 | 7-38 | 0-45 | 0-4 | -124 |
| Miami | 52-7 | | 34-16 | 25-17 | 27-7 | 4-0 | 91 |
| UNC | 24-21 | 16-34 | | 7-5 | 3-30 | 2-2 | -40 |
| UVA | 38-7 | 17-25 | 5-7 | | 14-52 | 1-3 | -17 |
| VT | 45-0 | 7-27 | 30-3 | 52-14 | | 3-1 | 90 |

$$\begin{array}{l} \text{Duke} \\ \text{Miami} \\ \text{UNC} \\ \text{UVA} \\ \text{VT} \end{array} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Duke} \\ \text{Miami} \\ \text{UNC} \\ \text{UVA} \\ \text{VT} \end{array} \begin{pmatrix} -124 \\ 91 \\ -40 \\ -17 \\ 90 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{Duke} \\ \text{Miami} \\ \text{UNC} \\ \text{UVA} \\ \text{VT} \end{array} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

# Zadanie dla chętnych

Proszę o stworzenie rankingu rywalizacji 4 drużyn, których graf rozgrywek wygląda następująco:




za pomocą opisanej metody spektralnej. Jak wygląda sytuacja przy innym wyborze macierzy $A$?

Przypomnijmy, że strzałka $\boxed{a} \xrightarrow{k} \boxed{b}$ oznacza, że drużyna $\boxed{a}$ w rywalizacji z drużyną $\boxed{b}$ straciła (łącznie) $k$ punktów.

### Academic work


- Barrow, Daniel; Drayer, Ian; Elliott, Peter; Gaut, Garren; Osting, Braxton (May 2013). "Ranking rankings: an empirical comparison of the predictive power of sports ranking methods". *Journal of Quantitative Analysis in Sports*. **9** (2). doi:10.1515/jqas-2013-0013 (https://doi.org/10.1515%2Fjqas-2013-0013). ISSN 1559-0410 (https://www.worldcat.org/issn/1559-0410). S2CID 199665454 (https://api.semanticscholar.org/CorpusID:199665454).
  - Much of this information is available at Sports Rankings REU Final Report 2012: An Analysis of Pairwise-Comparison Based Sports Ranking Methods and a Novel Agent-Based Markovian Basketball Simulation (https://web.archive.org/web/20141029012933/http://www.math.duke.edu/~idrayer/2012REU.pdf) at the Internet Archive PDF
- Gray, Kathy L.; Schwertman, Neil C. (March 2012). "Comparing Team Selection and Seeding for the 2011 NCAA Men's Basketball Tournament". *Journal of Quantitative Analysis in Sports*. **8** (1). doi:10.1515/1559-0410.1369 (https://doi.org/10.1515%2F1559-0410.1369). ISSN 1559-0410 (https://www.worldcat.org/issn/1559-0410). S2CID 121322446 (https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121322446).
- Massey, Ken (Spring 1997). "Honors Project in Mathematics" (https://www.masseyratings.com/theory/massey97.pdf) (PDF). available at Statistical Models Applied to the Rating of Sports Teams (https://web.archive.org/web/20141029025444/http://74.207.231.132/theory/massey97.pdf) at the Internet Archive PDF
- Mease, David (2003). "A Penalized Maximum Likelihood Approach for the Ranking of College Football Teams Independent of Victory Margins" (http://www.davemease.com/papers/football.pdf) (PDF). *The American Statistician*. **57** (4): 241–248. doi:10.1198/0003130032396 (https://doi.org/10.1198%2F0003130032396). S2CID 2372150 (https://api.semanticscholar.org/CorpusID:2372150).


## References


1. Fagan, Ryan (2011-03-09). "Sorting through teams on one big bubble" (http://aol.sportingnews.com/ncaa-basketball/story/2011-03-09/sorting-through-teams-on-one-big-bubble). *Sporting News*. Retrieved 2011-03-24. "This is a look at 20 of the teams (in alphabetical order) residing on this year's big ol' bubble. We've included three statistical rankings. The RPI (ratings percentage index, taken from collegeRPI.com) is considered the standard and is provided to committee members during the selection process. The two other ranking indexes include margin of victory in their formulas—the Pomeroy ratings (at kenpom.com) and Sagarin ratings (via USA Today)—aren't new but have played an increased role in discussions about potential seeds during this college basketball season."
2. Ken Massey [@masseyratings] (3 Nov 2014). "@kenpomeroy human polls have limited

6. Stewart Mandel [@slmandel] (12 Nov 2014). "Committee doesn't use an SOS ranking. It looks at opponents' record and opponents' opponents record" (https://twitter.com/slmandel/status/532624545300369408) (Tweet). Retrieved 12 Nov 2014 – via Twitter.
7. Richards, Darryl (2001). "BCS removes margin-of-victory element" (http://www.foxsports.com/collegefootball/story/RICHARDS%253A-BCS-removes-margin-of-victory-element). *Fox Sports*. Retrieved 12 November 2014.
8. Sagarin, Jeff (Fall 2014). "NCAAF Jeff Sagarin Ratings" (https://www.usatoday.com/sports/ncaaf/sagarin/). *USA Today*. Retrieved 12 November 2014.
9. Easterbrook, Gregg (18 November 2014). "More flags on D spins scoreboards" (http://espn.go.com/nfl/story/_/page/TMQWeekEleven141118/more-defensive-penalties-causes-change-nfl-tuesday-morning-quarterback). *ESPN*. Retrieved 19 November 2014.
10. Simmons, Bill (24 October 2014). "Week 8 Picks: A Gambling Epiphany" (http://grantland.com/the-triangle/week-8-picks-a-gambling-epiphany/). *Grantland*. Retrieved 19 November 2014.
11. Schatz, Aaron; Alamar, Ben; Barnwell, Bill; Bill Connelly; Doug Farrar (2011). *Football Outsiders Almanac 2011: The Essential Guide to the 2011 NFL and College Football Seasons* (https://books.google.com/books?id=E84YYAAACAAJ). CreateSpace. p. xviii. ISBN 978-1-4662-4613-3.
12. Barnwell, Bill (November 5, 2014). "NFL at the Half: Breaking Down the Numbers" (http://grantland.com/the-triangle/nfl-at-the-half-breaking-down-the-numbers/). *Grantland*. Retrieved January 7, 2015.
13. Simmons, Bill (7 November 2014). "Revisiting the Y2K-Compliant Quarterbacks" (http://grantland.com/the-triangle/revisiting-the-y2k-compliant-quarterbacks/). Retrieved 10 November 2014.
14. Silver, Nate (4 September 2014). "Introducing NFL Elo Ratings" (https://fivethirtyeight.com/datalab/introducing-nfl-elo-ratings/). *FiveThirtyEight*. Retrieved 10 November 2014.
15. Mills, Matt (21 December 2014). "Using Continuous-Time Markov Chains to Rank College Football Teams" (http://thespread.us/continuous-markov-ratings.html). *The Spread*. Retrieved 21 December 2014.
16. "Ranking NFL teams using Network Science" (https://www.linkedin.com/pulse/ranking-nfl-teams-using-network-science-konstantinos-pelechrinis?trk=prof-post/). *LinkedIN*. 17 March 2016. Retrieved 17 March 2016.
17. "Modifying Google's Page Ranking Algorithm to rank teams" (https://www.reddit.com/r/CFBAnalysis/comments/2ppfg3/modifying_googles_page_ranking_algorithm_to_rank/). *Reddit*. 21 December 2014. Retrieved 22 December 2014.
18. Weng, Ruby C.; Lin, Chih-Jen (2011). "A Bayesian Approximation Method for Online Ranking" (http://jmlr.csail.mit.edu/papers/volume12/weng11a/weng11a.pdf) (PDF). *Journal of Machine Learning Research*. **12**: 267–300.
19. "Wayne Winston: Analytics in the World of Sports" (http://www.kelley.iu.edu/ODT/NewsEvents/News/NewsReleases/page42205.html). *Indiana University Bloomington - Kelley School of Business - Operations & Decisions Technologies*. Nov 25, 2013. Retrieved 8 Nov 2014.
20. "Numbers game" (http://www.washingtontimes.com/news/2004/apr/13/20040413-121657-14

# Dziękuję za uwagę!

Zainteresowanych zapraszam: wojciech.kryszewski@p.lodz.pl