Kilka zastosowań matematyki w życiu codziennym (albo: Tydzień z życia matematyka)

Jacek Jachymski

Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

8 listopada, 2022 r.

Nie lubię poniedziałku...,

a w szczególności tego z początku października, kiedy ogłoszono, że inflacja w Polsce we wrześniu wyniosła 17,2 %. Jednocześnie rząd zapowiedział „podwyżkę" pensji nauczycieli o 4,4 %.
W rezultacie należy tak naprawdę mówić, że władze zarządziły obniżkę wynagrodzeń, tylko o ile? Czy o 17,2 - 4,4 (= 12,8) procent, jak twierdziły niektóre, słusznie zresztą oburzone osoby? Przetestujmy tę hipotezę.

Przykład

W 1989 r. inflacja w Polsce wyniosła ok. 250 %, a więc ceny wzrosły średnio 3,5 raza. Załóżmy, że nasze wynagrodzenie wzrosło w tym czasie o 100 %. Według hipotezy pensja zmalałaby o 150 %, co oznaczałoby, że to my mielibyśmy płacić pracodawcy kwotę odpowiadającą połowie naszego wynagrodzenia. Nie jest to prawdą i tym samym obaliliśmy hipotezę.

Wtorek – analizujemy „podwyżkę"

Dziś chcemy wyznaczyć wzór na wskaźnik obniżki pensji wyrażony w procentach. Oznaczmy przez w_0 wielkość naszego wynagrodzenia przed inflacją, przez s stopę inflacji w procentach i przez p podwyżkę pensji w procentach. Jeśli mielibyśmy nie odczuć skutków inflacji to nasza nowa pensja powinna wynosić $(1 + s/100)w_0$, a tymczasem wynosi $(1 + p/100)w_0$. Ponosimy więc stratę równą różnicy tych liczb tj., po przekształceniach, $(s - p)w_0/100$. Stanowi to następującą część należnego wynagrodzenia (w procentach):

$$\frac{(s-p)w_0}{100\left(1+\frac{s}{100}\right)w_0} \cdot 100 = \frac{s-p}{100+s} \cdot 100.$$

Przy $s = 17,2$ i $p = 4,4$ otrzymamy więc, że siła nabywcza naszej pensji spadnie o 10,92 %, a nie o 12,8 %. Przy $s = 250$ i $p = 100$ dostaniemy 42,86 %.

Środa – planujemy zakupy

Nieco pokrzepieni wtorkowymi rachunkami, a z drugiej strony, biorąc pod uwagę, że inflacja narasta, postanawiamy wydać część naszych oszczędności na zakup sprzętu AGD. W planach mamy kupno 5 produktów: lodówki (2500 zł), kuchni indukcyjnej (2000 zł), pralki (1500 zł), zmywarki (1300 zł) i kuchenki mikrofalowej (1000 zł). W radiu TOK FM usłyszeliśmy o interesującej promocji w sklepach Media Expert przy zakupie kilku artykułów: drugi (tańszy) produkt 25 % taniej, trzeci 50 % taniej, czwarty 75 % taniej, a piąty za złotówkę. (Te obniżki obowiązują, odpowiednio, przy zakupie 2, 3, 4 i 5 produktów.) Decydujemy się skorzystać z tej promocji, tylko jak to zrobić najlepiej? Zostawiamy ten problem na następny dzień.

Czwartek – analizujemy promocję w Media Expert

Dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$ oznaczmy przez p_i cenę i-tego produktu i ustawmy je w porządku nierosnącym, a więc

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant p_4 \geqslant p_5.$$

Dla uproszczenia przyjmiemy, że piąty produkt otrzymamy za darmo. W zależności od wyboru wariantu promocji możemy zapłacić:

$S_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, gdy wybierzemy sugerowaną promocję;
$S_2 = (p_1 + p_2 + p_3 + \frac{1}{4}p_4) + p_5$, przy promocji dla 4 artykułów;
$S_3 = (p_1 + p_2 + \frac{1}{2}p_3) + (p_4 + \frac{3}{4}p_5)$ (korzystamy z promocji 2 razy);
$S_4 = (p_1 + \frac{3}{4}p_2) + (p_3 + p_4 + \frac{1}{2}p_5)$ (j.w.);
$S_5 = (p_1 + \frac{3}{4}p_2) + (p_3 + \frac{3}{4}p_4) + p_5$ (j.w.);
$S_6 = p_1 + (p_2 + \frac{3}{4}p_3) + (p_4 + \frac{3}{4}p_5)$ (j.w.).

Łatwo jednak zauważyć, że $S_5 \leqslant S_6$: w przypadku 5. nasz zysk wynosi $\frac{1}{4}(p_2 + p_4)$, a w 6. $\frac{1}{4}(p_3 + p_5)$.

Czwartek – analizujemy promocję w Media Expert

Pozostaje więc porównać warianty 1-5. Dla przykładu zbadamy, kiedy wariant 3. jest najkorzystniejszy. Jest tak, gdy ceny artykułów spełniają następujący układ nierówności:

$$\begin{aligned}
p_1 + p_2 + \tfrac{1}{2}p_3 + p_4 + \tfrac{3}{4}p_5 &\leqslant p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \\
p_1 + p_2 + \tfrac{1}{2}p_3 + p_4 + \tfrac{3}{4}p_5 &\leqslant p_1 + p_2 + p_3 + \tfrac{1}{4}p_4 + p_5 \\
p_1 + p_2 + \tfrac{1}{2}p_3 + p_4 + \tfrac{3}{4}p_5 &\leqslant p_1 + \tfrac{3}{4}p_2 + p_3 + p_4 + \tfrac{1}{2}p_5 \\
p_1 + p_2 + \tfrac{1}{2}p_3 + p_4 + \tfrac{3}{4}p_5 &\leqslant p_1 + \tfrac{3}{4}p_2 + p_3 + \tfrac{3}{4}p_4 + p_5.
\end{aligned}$$

Po prostych przekształceniach powyższy układ przybiera postać:

Czwartek – analizujemy promocję w Media Expert

$$
\begin{aligned}
&3p_5 \leqslant 2p_3\\
&3p_4 \leqslant 2p_3 + p_5\\
&p_2 + p_5 \leqslant 2p_3\\
&p_2 + p_4 \leqslant 2p_3 + p_5.
\end{aligned}
$$

Uwzględniając, że interesują nas takie rozwiązania $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$, że $0 < p_5 \leqslant p_4 \leqslant p_3 \leqslant p_2 \leqslant p_1$ otrzymujemy:

$p_3 > 0$ i $p_5 \in (0, \frac{2}{3}p_3]$
$p_4 \in [p_5, \frac{1}{3}p_5 + \frac{2}{3}p_3]$ (wtedy $p_5 \leqslant p_4 \leqslant p_3$(!))
$p_2 \in [p_3, \min\{2p_3 - p_5, 2p_3 - p_4 + p_5\}]$ i $p_1 \in [p_2, \infty)$.

Zauważmy, że jeśli spełnione są dwa pierwsze warunki to $2p_3 - p_5 \geqslant \frac{4}{3}p_3$ i $2p_3 - p_4 + p_5 \geqslant \frac{4}{3}p_3 + \frac{2}{3}p_5$ więc przedział do którego ma należeć p_2 jest niepusty. W szczególności interesująca nas piątka $(2500, 2000, 1500, 1300, 1000)$ spełnia powyższe warunki więc wariant 3 jest dla nas najkorzystniejszym wyborem.

Piątek – stresujący dzień zakupów

Po czwartkowych przemyśleniach idziemy pewnym krokiem do sklepu Media Ekspert i dokonujemy planowanych zakupów sprzętu AGD, rozkładając je na dwa oddzielne paragony. Sprzedawca dziwi się, że nie chcemy mieć kuchenki mikrofalowej za darmo, ale my wiemy swoje. Resztę dnia spędzamy naprzemiennie włączając i wyłączając zakupione urządzenia, dopóki nie wystrzeliły nam bezpieczniki, gdy włączyliśmy je wszystkie naraz.

Sobota – na rowerach wokół Tatr

Dla odreagowania stresu związanego z zakupami i pierwszymi próbami eksploatacji nowego sprzętu, wybieramy się na rowerach na pętlę wokół Tatr. Jesteśmy na Słowacji na 130. kilometrze tej pętli. Przed nami ciężki, 10-kilometrowy podjazd w kierunku Huciańskiej Przełęczy, za którą czeka nas z kolei 10-kilometrowy, stromy zjazd. Podjeżdżamy z prędkością 8 km/godz. i stwierdzam, że na całym tym 20-kilometrowym fragmencie będziemy mieć niską prędkość średnią, nie większą niż 15 km/godz. Mój kolega jest jednak innego zdania i twierdzi, że bez problemu nadrobimy to na zjeździe: on zjechał tam kiedyś ze średnią prędkością 72 km/godz. Zatem ostatecznie, jego zdaniem, uzyskamy średnią 40 km/godz. Czy może zmęczenie sprawiło, że mogłem nie mieć racji?

Sobota – na rowerach wokół Tatr

Oznaczmy przez v_1 średnią prędkość podjazdu o długości s, a przez v_2 średnią prędkość zjazdu o tej samej długości. Czas podjazdu wynosi więc s/v_1, a czas zjazdu s/v_2. Zatem prędkość średnią wyznaczymy ze wzoru:

$$\frac{2s}{s/v_1 + s/v_2} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2v_1}{v_1/v_2 + 1}.$$

Szukana prędkość jest więc średnią harmoniczną prędkości v_1 i v_2. W opisanej sytuacji wynosi ona $\frac{2\cdot 8\cdot 72}{8+72}$ czyli 14,4 km/godz. Zauważmy, że gdy w powyższym wzorze $v_2 \to \infty$ (co wg fizyków nie jest możliwe) to w granicy otrzymamy $2v_1$. Zatem nawet gdybyśmy zjeżdżali z prędkością światła to i tak nie przekroczymy progu 16 km/godz.

Morał: *chcąc uzyskać w górach dobrą prędkość średnią, nie można „odpuszczać" na podjazdach.*

Niedziela – oglądamy szyszki i kwiaty, rozmyślamy

Po sobotnich zmaganiach idziemy na relaksacyjny spacer do iglastego lasu. Oglądamy szyszki modrzewia, sosny i świerka. W szyszkach dostrzegamy układy spiralne: u modrzewia 3 spirale lewoskrętne i 5 prawoskrętnych, u sosny, odpowiednio 5 i 8, a u świerka 8 i 13. Wychodząc z lasu dostrzegamy pole z rosnącym słonecznikiem. Oglądamy jego kwiaty i ponownie dostrzegamy układy spiralne. Zaintrygowani tym widokiem znów badamy liczbę spiral lewo- i prawoskrętnych: w młodych kwiatach jest ich 13 i 21, a w starszych 21 i 34, bądź nawet 34 i 55. Patrzymy na liczby zapisane do tej pory w notatniku: 3,5,8,13,21,34,55. Rozmyślamy czy jest w tym jakaś prawidłowość. Po chwili refleksji zauważamy, że każda liczba w tym ciągu – poczynając od trzeciej – jest sumą dwóch liczb ją poprzedzających. Ta własność zachowa się, jeśli dostawimy w tym ciągu na początku liczby 1,1 i 2 dostając ciąg (F_n) postaci:

Niedziela – oglądamy szyszki i kwiaty, rozmyślamy

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...).$$

Ciąg (F_n) po raz pierwszy pojawił się w pracy z 1202 r. włoskiego matematyka, Leonarda Fibonacciego w związku z badaniem modelu rozmnażania się królików. Ciąg Fibonacciego można zdefiniować indukcyjnie:

$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla dowolnej liczby naturalnej n.

Rozważmy teraz zbiór wszystkich ciągów Fibonacciego (niekoniecznie zaczynających się od wyrazów 1 i 1). Zauważmy, że wystarczy znać dwa pierwsze wyrazy takiego ciągu, by móc wyznaczyć jakikolwiek inny jego wyraz. Z tego względu dowolny ciąg Fibonacciego można w pewnym sensie utożsamić z punktem płaszczyzny (a_1, a_2). Zauważmy dalej, że taki punkt można przedstawić w postaci:

Niedziela – oglądamy szyszki i kwiaty, rozmyślamy

$$(a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1).$$

(W algebrze liniowej mówimy wtedy, że zbiór $\{(1, 0), (0, 1)\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$.) Okazuje się, że analogicznie można opisać dowolny ciąg Fibonacciego (a_n):

$$(a_n) = a_1(1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) + a_2(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...).$$

(Zbiór $\{(1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...), (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)\}$ jest bazą przestrzeni ciągów Fibonacciego.) Nie są to jedyne bazy.
W przypadku płaszczyzny bazą jest dowolny zbiór 2 wektorów nie mających tego samego kierunku, np. zbiór $\{(1, 1), (1, 2)\}$. Istotnie,

$$(a_1, a_2) = (2a_1 - a_2)(1, 1) + (a_2 - a_1)(1, 2).$$

Podobna obserwacja dotyczy zbioru ciągów Fibonacciego: bazą jest tu dowolny zbiór 2 ciągów Fibonacciego, mających „różne kierunki“, tj. żaden z nich nie powstaje przez wymnożenie wyrazów tego drugiego ciągu przez pewną liczbę.
Spróbujemy znaleźć teraz dwa takie ciągi szukając ich wśród ciągów geometrycznych postaci (q^{n-1}), gdzie $q \neq 0$. Taki ciąg jest ciągiem Fibonacciego wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby naturalnej n,

$$q^{n+1} = q^n + q^{n-1} \quad \text{czyli} \quad q^2 = q + 1.$$

To równanie kwadratowe ma 2 rozwiązania:

$$q_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ i } q_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Niedziela – oglądamy szyszki i kwiaty, rozmyślamy

Zbiór $\{(q_1^{n-1}),(q_2^{n-1})\}$ jest bazą przestrzeni ciągów Fibonacciego. Zatem dla badanego ciągu istnieją takie liczby x, y, że

$$(1,1,2,3,5,8,\ldots) = x\left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) + y\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Stąd otrzymamy, że

$$1 = x + y \quad \text{i} \quad 1 = x\frac{1-\sqrt{5}}{2} + y\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Rozwiązując ten układ równań łatwo otrzymamy, że

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad y = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}.$$

Niedziela – oglądamy szyszki i kwiaty, rozmyślamy

Na koniec możemy nacieszyć oczy końcowym wzorem na n-ty wyraz badanego ciągu Fibonacciego:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Jest zaskakujące, że do opisu ciągu (F_n), którego wyrazy są liczbami naturalnymi trzeba było użyć liczb niewymiernych!

Matematyka jest pełna niespodzianek.