KIEDY WARTO ZMIENIĆ ZDANIE?

... czyli kilka słów o twierdzeniu Bayesa

Mateusz Krukowski

Adiunkt w Instytucie Matematyki Politechniki Łódzkiej

14 grudnia 2021

Przykład Kahnemana*

*z książki "Pułapki myślenia. O myśleniu szybkim i wolnym" , rozdział 16, str. 225

W mieście funkcjonują dwie firmy taksówkarskie, "Zieloni" (85%) oraz "Niebiescy" (15%).

Przykład Kahnemana*

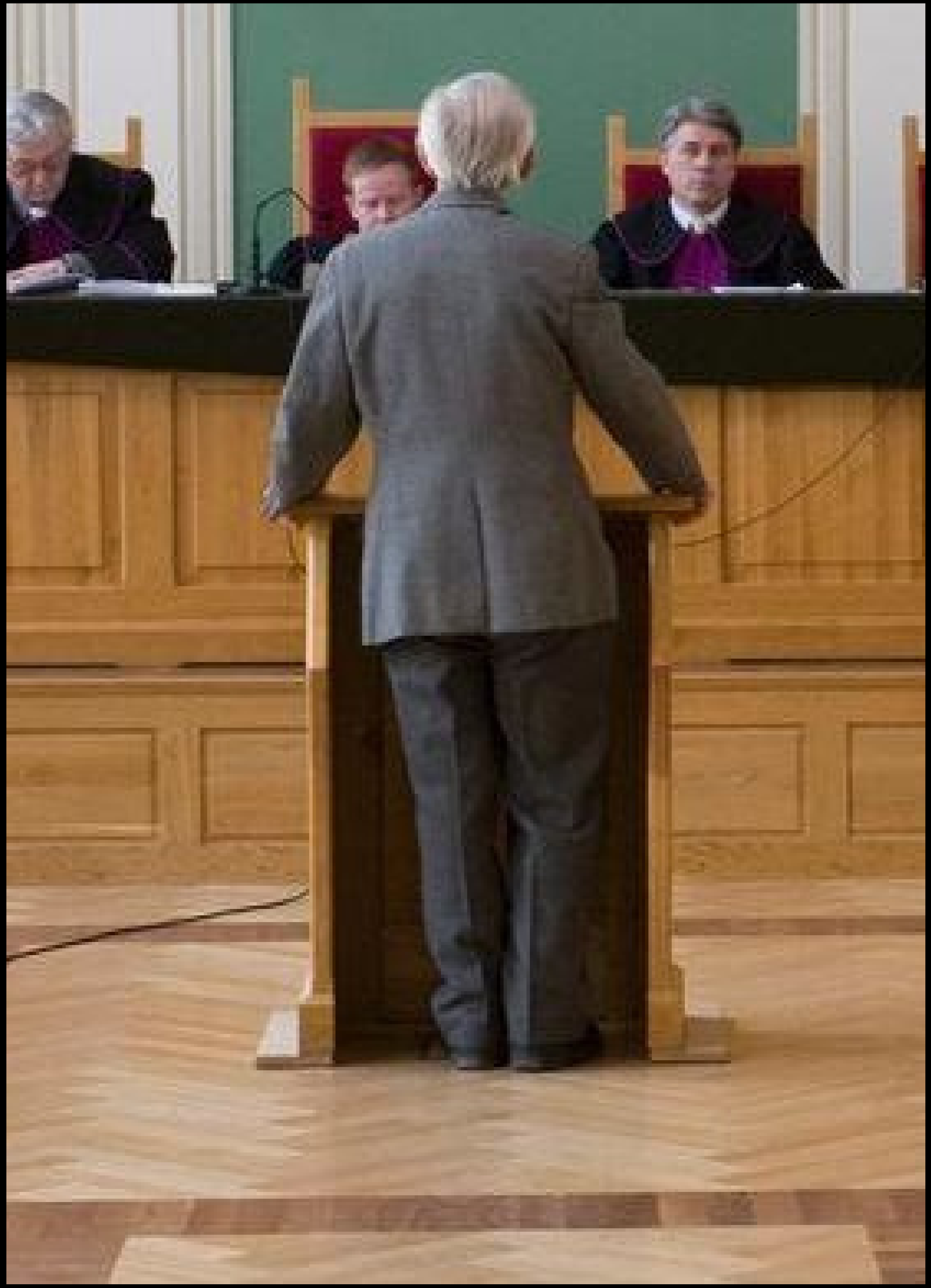
*z książki "Pułapki myślenia. O myśleniu szybkim i wolnym" , rozdział 16, str. 225

- W mieście funkcjonują dwie firmy taksówkarskie, "Zieloni" (85%) oraz "Niebiescy" (15%).
- W nocy miał miejsce wypadek, w którym taksówka potrąciła pieszego.

Przykład Kahnemana*

*z książki "Pułapki myślenia. O myśleniu szybkim i wolnym" , rozdział 16, str. 225

- W mieście funkcjonują dwie firmy taksówkarskie, "Zieloni" (85%) oraz "Niebiescy" (15%).
- W nocy miał miejsce wypadek, w którym taksówka potrąciła pieszego.
- Jakie jest prawdopodobieństwo, że taksówka była zielona (tj. należała do firmy "Zieloni")?

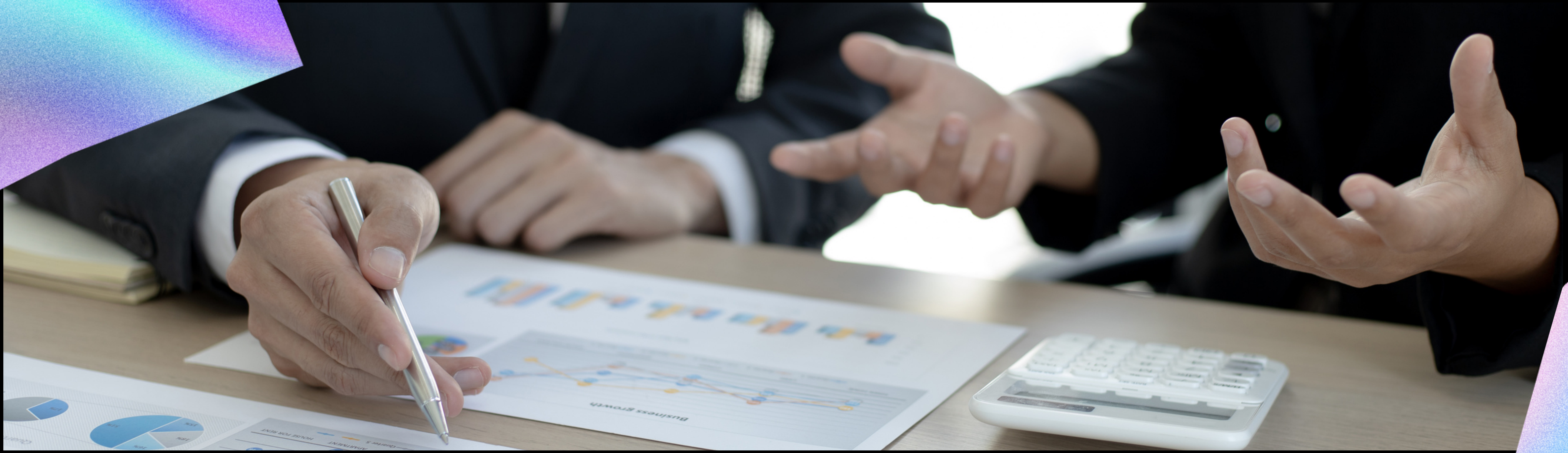


Świadek zeznaje!!!

Świadek twierdzi, że taksówka była ***niebieska***.

Sąd uwzględniając wiek świadka i warunki w czasie wypadku (noc, mgła, itd.) ocenił wiarygodność zeznań:

1. W 80% świadek identyfikuje kolor poprawnie.
2. W 20% świadek identyfikuje kolor niepoprawnie.



Uwzględniając zeznania świadka, jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadek spowodowała taksówka zielona?

Czym jest przestrzeń probabilistyczna?

Czym jest przestrzeń probabilistyczna?

1.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

Czym jest przestrzeń probabilistyczna?

1.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

2.

Rodzina (sigma-ciało) zdarzeń losowych

Czym jest przestrzeń probabilistyczna?

1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych
2. Rodzina (sigma-ciało) zdarzeń losowych
3. Prawdopodobieństwo (miara unormowana)

Czym jest prawdopodobieństwo?

Funkcja ***P***, której argumentami są zdarzenia losowe i która spełnia 3 warunki:

Czym jest prawdopodobieństwo?

Funkcja ***P***, której argumentami są zdarzenia losowe i która spełnia 3 warunki:

1.

P(zdarzenie niemożliwe)
= 0

Czym jest prawdopodobieństwo?

Funkcja ***P***, której argumentami są zdarzenia losowe i która spełnia 3 warunki:

1.

P(zdarzenie niemożliwe) = 0

2.

Jeśli A, B, ..., Z to zdarzenia rozłączne, to
P(A lub B lub ... lub Z)
= ***P***(A) + ***P***(B) + ... + ***P***(Z)

Czym jest prawdopodobieństwo?

Funkcja ***P***, której argumentami są zdarzenia losowe i która spełnia 3 warunki:

1.

P(zdarzenie niemożliwe) = 0

2.

Jeśli A, B, ..., Z to zdarzenia rozłączne, to
P(A lub B lub ... lub Z)
= ***P***(A) + ***P***(B) + ... + ***P***(Z)

3.

P(zdarzenie pewne) = 1

Prawdopodobieństwo warunkowe

Jeśli $P(B) > 0$ to
prawdopodobieństwo warunkowe
zdarzenia A przy warunku B wyraża
się wzorem
$P(A|B) = P(A \text{ oraz } B) \,/\, P(B)$.

Twierdzenie Bayesa

Jeśli $\boldsymbol{P}(A)>0$ oraz $\boldsymbol{P}(B) > 0$ to

$\boldsymbol{P}(B) * \boldsymbol{P}(A|B) = \boldsymbol{P}(A) * \boldsymbol{P}(B|A)$.

Twierdzenie Bayesa

H1 - hipoteza 1 ("taksówka była zielona")
H2 - hipoteza 2 ("taksówka była niebieska")
D - materiał dowodowy ("zeznania świadka, że taksówka była niebieska")

Twierdzenie Bayesa

H1 - hipoteza 1 ("taksówka była zielona")
H2 - hipoteza 2 ("taksówka była niebieska")
D - materiał dowodowy ("zeznania świadka, że taksówka była niebieska")

$$\boldsymbol{P}(D) * \boldsymbol{P}(H1|D) = \boldsymbol{P}(D|H1) * \boldsymbol{P}(H1)$$
$$\boldsymbol{P}(D) * \boldsymbol{P}(H2|D) = \boldsymbol{P}(D|H2) * \boldsymbol{P}(H2)$$

Twierdzenie Bayesa

H1 - hipoteza 1 ("taksówka była zielona")
H2 - hipoteza 2 ("taksówka była niebieska")
D - materiał dowodowy ("zeznania świadka, że taksówka była niebieska")

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{D}) * \boldsymbol{P}(\mathrm{H1}|\mathrm{D}) = \boldsymbol{P}(\mathrm{D}|\mathrm{H1}) * \boldsymbol{P}(\mathrm{H1})$$
$$\boldsymbol{P}(\mathrm{D}) * \boldsymbol{P}(\mathrm{H2}|\mathrm{D}) = \boldsymbol{P}(\mathrm{D}|\mathrm{H2}) * \boldsymbol{P}(\mathrm{H2})$$

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{H1}|\mathrm{D}) / \boldsymbol{P}(\mathrm{H2}|\mathrm{D}) = \boldsymbol{P}(\mathrm{D}|\mathrm{H1}) / \boldsymbol{P}(\mathrm{D}|\mathrm{H2}) * \boldsymbol{P}(\mathrm{H1}) / \boldsymbol{P}(\mathrm{H2})$$

Twierdzenie Bayesa

P(H1 = "taksówka była zielona") = 0.85

P(H2 = "taksówka była niebieska") = 0.15

Twierdzenie Bayesa

P(H1 = "taksówka była zielona") = 0.85

P(H2 = "taksówka była niebieska") = 0.15

P(D|H1) ~ jeśli taksówka była zielona, to jak bardzo oczekiwane jest zeznanie świadka, że była ona niebieska?

Twierdzenie Bayesa

P(H1 = "taksówka była zielona") = 0.85

P(H2 = "taksówka była niebieska") = 0.15

P(D|H1) ~ jeśli taksówka była zielona, to jak bardzo oczekiwane jest zeznanie świadka, że była ona niebieska? Odp: 0.2.

Twierdzenie Bayesa

P(H1 = "taksówka była zielona") = 0.85
P(H2 = "taksówka była niebieska") = 0.15

P(D|H1) ~ jeśli taksówka była zielona, to jak bardzo oczekiwane jest zeznanie świadka, że była ona niebieska? Odp: 0.2.

P(D|H2) ~ jeśli taksówka była niebieska, to jak bardzo oczekiwane jest zeznanie świadka, że była ona niebieska?

Twierdzenie Bayesa

P(H1 = "taksówka była zielona") = 0.85
P(H2 = "taksówka była niebieska") = 0.15

P(D|H1) ~ jeśli taksówka była zielona, to jak bardzo oczekiwane jest zeznanie świadka, że była ona niebieska? Odp: 0.2.

P(D|H2) ~ jeśli taksówka była niebieska, to jak bardzo oczekiwane jest zeznanie świadka, że była ona niebieska? Odp: 0.8.

Twierdzenie Bayesa

$$P(H1 = \text{"taksówka była zielona"}) = 0.85$$

$$P(H2 = \text{"taksówka była niebieska"}) = 0.15$$

$$P(D|H1) = 0.2$$

$$P(D|H2) = 0.8$$

Twierdzenie Bayesa

P(H1 = "taksówka była zielona") = 0.85

P(H2 = "taksówka była niebieska") = 0.15

$$P(D|H1) = 0.2$$

$$P(D|H2) = 0.8$$

$$P(H1|D) \,/\, P(H2|D) = P(D|H1) \,/\, P(D|H2) \;*\; P(H1) \,/\, P(H2)$$

$$= 0.2/0.8 \;*\; 0.85/0.15 = 17/12$$

Twierdzenie Bayesa

Skoro taksówka jest albo zielona albo niebieska ("H1 lub H2" to zdarzenie pewne), więc

$\boldsymbol{P}(\mathrm{H2}|\mathrm{D}) = \boldsymbol{P}(\mathrm{H2}\ \text{oraz}\ \mathrm{D})\ /\ \boldsymbol{P}(\mathrm{D})$

$= (\boldsymbol{P}(\mathrm{D}) - \boldsymbol{P}(\mathrm{H1}\ \text{oraz}\ \mathrm{D}))\ /\ \boldsymbol{P}(\mathrm{D}) = 1 - \boldsymbol{P}(\mathrm{H1}|\mathrm{D})$

Twierdzenie Bayesa

Skoro taksówka jest albo zielona albo niebieska
("H1 lub H2" to zdarzenie pewne), więc

$$\boldsymbol{P}(H2|D) = \boldsymbol{P}(H2 \text{ oraz } D) / \boldsymbol{P}(D)$$

$$= (\boldsymbol{P}(D) - \boldsymbol{P}(H1 \text{ oraz } D)) / \boldsymbol{P}(D) = 1 - \boldsymbol{P}(H1|D)$$

$$\boldsymbol{P}(H1|D) / \boldsymbol{P}(H2|D) = 17/12$$

upraszcza się do równania

$$12 * \boldsymbol{P}(H1|D) = 17 * (1 - \boldsymbol{P}(H1|D))$$

Twierdzenie Bayesa

Skoro taksówka jest albo zielona albo niebieska ("H1 lub H2" to zdarzenie pewne), więc

$$\boldsymbol{P}(H2|D) = \boldsymbol{P}(H2 \text{ oraz } D) \,/\, \boldsymbol{P}(D)$$

$$= (\boldsymbol{P}(D) - \boldsymbol{P}(H1 \text{ oraz } D)) \,/\, \boldsymbol{P}(D) = 1 - \boldsymbol{P}(H1|D)$$

$$\boldsymbol{P}(H1|D) \,/\, \boldsymbol{P}(H2|D) = 17/12$$

upraszcza się do równania

$$12 * \boldsymbol{P}(H1|D) = 17 * (1 - \boldsymbol{P}(H1|D))$$

czyli

$$\boldsymbol{P}(H1|D) = 17/29 \sim 58{,}6\%.$$

Zapis monitoringu odnaleziony!!!

Na ulicy na której doszło do wypadku zabezpieczono monitoring. Kamera nagrała ***niebieską*** taksówkę poruszającą się z dużą prędkością 200 m przed miejscem wypadku (sam wypadek nie został nagrany). Czas nagrania również pokrywa się z czasem potrącenia pieszego.

Zapis monitoringu odnaleziony!!!

Na ulicy na której doszło do wypadku zabezpieczono monitoring. Kamera nagrała ***niebieską*** taksówkę poruszającą się z dużą prędkością 200 m przed miejscem wypadku (sam wypadek nie został nagrany). Czas nagrania również pokrywa się z czasem potrącenia pieszego.

Sąd ocenił wiarygodność nagrania:

1. W 90% monitoring istotnie rejestruje sprawcę wypadku.
2. W 10% monitoring rejestruje przypadkowy pojazd niezwiązany z wydarzeniem.

Uwzględniając zeznania świadka *ORAZ MONITORING*, jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadek spowodowała taksówka zielona?

Twierdzenie Bayesa

P(H1 = "taksówka była zielona") = 17/29

P(H2 = "taksówka była niebieska") = 12/29

Twierdzenie Bayesa

P(H1 = "taksówka była zielona") = 17/29
P(H2 = "taksówka była niebieska") = 12/29

P(D|H1) ~ jeśli taksówka była zielona, to jak bardzo oczekiwane jest nagranie monitoringu, że była ona niebieska?

Twierdzenie Bayesa

P(H1 = "taksówka była zielona") = 17/29
P(H2 = "taksówka była niebieska") = 12/29

P(D|H1) ~ jeśli taksówka była zielona, to jak bardzo oczekiwane jest nagranie monitoringu, że była ona niebieska? Odp: 0.1.

Twierdzenie Bayesa

P(H1 = "taksówka była zielona") = 17/29

P(H2 = "taksówka była niebieska") = 12/29

P(D|H1) ~ jeśli taksówka była zielona, to jak bardzo oczekiwane jest nagranie monitoringu, że była ona niebieska? Odp: 0.1.

P(D|H2) ~ jeśli taksówka była niebieska, to jak bardzo oczekiwane jest nagranie monitoringu, że była ona niebieska?

Twierdzenie Bayesa

P(H1 = "taksówka była zielona") = 17/29
P(H2 = "taksówka była niebieska") = 12/29

P(D|H1) ~ jeśli taksówka była zielona, to jak bardzo oczekiwane jest nagranie monitoringu, że była ona niebieska? Odp: 0.1.

P(D|H2) ~ jeśli taksówka była niebieska, to jak bardzo oczekiwane jest nagranie monitoringu, że była ona niebieska? Odp: 0.9.

Twierdzenie Bayesa

$$\boldsymbol{P}(\text{H1} = \text{"taksówka była zielona"}) = 17/29$$

$$\boldsymbol{P}(\text{H2} = \text{"taksówka była niebieska"}) = 12/29$$

$$\boldsymbol{P}(\text{D}|\text{H1}) = 0.1$$

$$\boldsymbol{P}(\text{D}|\text{H2}) = 0.9$$

Twierdzenie Bayesa

$P(H1 = \text{"taksówka była zielona"}) = 17/29$

$P(H2 = \text{"taksówka była niebieska"}) = 12/29$

$P(D|H1) = 0.1$

$P(D|H2) = 0.9$

$P(H1|D) \,/\, P(H2|D) = P(D|H1) \,/\, P(D|H2) \;*\; P(H1) \,/\, P(H2)$

$= 0.1/0.9 \;*\; 17/12 = 17/108$

Twierdzenie Bayesa

$\boldsymbol{P}(H1|D) \,/\, \boldsymbol{P}(H2|D) = 17/108$

upraszcza się do równania

$108 * \boldsymbol{P}(H1|D) = 17 * (1 - \boldsymbol{P}(H1|D))$

Twierdzenie Bayesa

$\boldsymbol{P}(\mathrm{H1}|\mathrm{D}) \,/\, \boldsymbol{P}(\mathrm{H2}|\mathrm{D}) = 17/108$

upraszcza się do równania

$108 * \boldsymbol{P}(\mathrm{H1}|\mathrm{D}) = 17 * (1 - \boldsymbol{P}(\mathrm{H1}|\mathrm{D}))$

czyli

$\boldsymbol{P}(\mathrm{H1}|\mathrm{D}) = 17/125 = 13{,}6\%$.

BARDZO DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ!!!