VIII Północne Spotkania Geometryczne

Łódź

7-8 czerwca 2014

Organizatorzy

Antoni Pierzchalski (UŁ)

Bogdan Balcerzak (PŁ)

Małgorzata Ciska-Niedziałomska (UŁ)

Małgorzata Grzyb (UŁ)

Lilianna Jarmakowska-Kostrzanowska (UŁ)

Anna Kaźmierczak (UŁ)

Anna Kimaczyńska (UŁ)

Agnieszka Klekot (UŁ)

Agnieszka Najberg (UŁ)

Izabela Stępniak (UŁ)

Sponsorzy

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Łódzkiego

Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej
Politechniki Łódzkiej

Lista uczestników

1. Bogdan Balcerzak, Politechnika Łódzka,
   bogdan.balcerzak@p.lodz.pl

2. Edyta Bartnicka, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie,
   edytabartnicka@wp.pl

3. Waldemar Cieślak, Politechnika Lubelska,
   w.cieslak@pollub.pl

4. Małgorzata Ciska-Niedziałomska, Uniwersytet Łódzki,
   mciska@math.uni.lodz.pl

5. Maciej Czarnecki, Uniwersytet Łódzki,
   maczar@math.i.lodz.pl

6. Małgorzata Grzyb, Uniwersytet Łódzki,
   grzyb@math.uni.lodz.pl

7. Bogusław Hajduk, Uniwersytet Wrocławski, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie, bhmath@interia.pl

8. Jan Jakóbowski, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie,
   jjakob@matman.uwm.edu.pl

9. Lilianna Jarmakowska-Kostrzanowska, Uniwersytet Łódzki,
   lilianna.kostrzanowska@gmail.com

10. Jerzy Kalina, Politechnika Łódzka,
    jerzy.kalina@p.lodz.pl

11. Sławomir Kapka, Politechnika Łódzka,
    skapka1@wp.pl

12. Anna Kaźmierczak, Uniwersytet Łódzki,
    akaz@math.uni.lodz.pl

13. Anna Kimaczyńska, Uniwersytet Łódzki,
kimaczynska@math.uni.lodz.pl

14. Agnieszka Klekot, Uniwersytet Łódzki,
aklekot@math.uni.lodz.pl

15. Wojciech Kozłowski, Uniwersytet Łódzki,
wojciech@math.uni.lodz.pl

16. Jan Kurek, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie,
kurek@hektor.umcs.lublin.pl

17. Karolina Lamkowska, Uniwersytet Łódzki,
klamkowska@math.uni.lodz.pl

18. Magdalena Lużyńczyk, Uniwersytet Łódzki,
luzynczyk@math.uni.lodz.pl

19. Andrzej Matraś, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie,
matras@uwm.edu.pl

20. Irena Morocka-Tralle, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie,
itralle@matman@uwm,edu.pl

21. Witold Mozgawa, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie,
mozgawa@poczta.umcs.lublin.pl

22. Agnieszka Najberg, Uniwersytet Łódzki,
agakapusta@wp.pl

23. Agnieszka Namiecińska, Uniwersytet Łódzki,
a.namiecinska@wp.pl

24. Kamil Niedziałomski, Uniwersytet Łódzki,
kamiln@math.uni.lodz.pl

25. Jarosław Paprocki, Uniwersytet Łódzki
jarek.paprocki@gmail.com

26. Ada Pałka, Uniwersytet Jagielloński,
ada.palka@uj.edu.pl

27. Antoni Pierzchalski, Uniwersytet Łódzki,
antoni@math.uni.lodz.pl

28. Mariusz Plaszczyk, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie,
mariusz.piotr.plaszczyk@gmail.com

29. Józef Przytycki, George Washington University, Waszyngton,
przytyck@gmail.com

30. Paweł T. Rogalski, Politechnika Poznańska
pawel.rogalski@student.put.poznan.pl

31. Magdalena Skrzypiec, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie,
mskrzypiec@umcs.lublin.pl

32. Izabela Stępniak, Uniwersytet Łódzki,
izulka146@wp.pl

33. Aleksy Tralle, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie,
tralle@matman.uwm.edu.pl

34. Maciej Trokowski, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu,
maciej.trokowski@mat.umk.pl

35. Paweł Walczak, Uniwersytet Łódzki,
pawelwal@math.uni.lodz.pl

36. Szymon M. Walczak, Uniwersytet Łódzki,
szymon.walczak@math.uni.lodz.pl

37. Andreas Zastrow, Uniwersytet Gdański,
zastrow@mat.ug.edu.pl

38. Tomasz Zawadzki, Uniwersytet Łódzki,
zawadzki@math.uni.lodz.pl

Program Konferencji

Sobota • 7 czerwca 2014

9.00 Otwarcie Konferencji: Ryszard Pawlak

Przewodniczący: Paweł Walczak

9.10 – 9.55 Aleksy Tralle — *Formalność orbifoldów Kaehlera i rozmaitości Sasakiego*

10.00–10.45 Witold Mozgawa — *Uogólnienie twierdzenia Mellisha*

10.50–11.05 — *przerwa na herbatę*

Przewodniczący: Andreas Zastrow

11.05–11.30 Jan Jakóbowski — *Jeszcze o wielomianie* $x^2 + x + 1$

11.35–12.00 Jan Kurek — *The natural transformations between r-tangent and r-cotangent bundles over Riemannian manifolds*

12.05–12.20 — *przerwa na herbatę*

12.20–12.45 Magdalena Skrzypiec — *Wzory całkowe dla krzywych dualnych do izooptyk wewnętrznych oraz ewolutoid owali*

12.50–13.15 Andrzej Matraś — *Ściśle 2-tranzytywne zbiory permutacji*

13.20–15.15 — *przerwa, wspólny obiad: godz 13.30 Centrum Konferencyjne*

Przewodniczący: Bogusław Hajduk

15.15–15.40 Maciej Czarnecki — *Opis pewnych foliacji w przestrzeni sfer*

15.45–16.10 Małgorzata Ciska-Niedziałomska — *Moduły foliacji wyznaczonych przez submersje sprzężone*

16.15–16.40 Szymon M. Walczak — *Optymalny transport w badaniu geometrii foliacji zwartych*

16.45–17.00 — *przerwa na herbatę*

17.00–17.25 Mariusz Plaszczyk — *Konstrukcje koneksji ogólnych na wiązce drugiego przedłużenia dżetowego rozmaitości włóknistych*

17.30–17.55 Ada Pałka — *Zastosowanie geometrii w budowaniu scenografii teatralnej*

Niedziela • 8 czerwca 2014

Przewodniczący: Aleksy Tralle

9.10–9.55 Bogusław Hajduk — *Pożytki z rączek*

10.00–10.45 Andreas Zastrow — *Porównanie różnych konstrukcji uogólnionych nakryć opartych na uniwersalnej przestrzeni ścieżek*

10.50–11.05 — *przerwa na herbatę*

Przewodniczący: Witold Mozgawa

11.05–11.30 Waldemar Cieślak — *U-funkcje*

11.35–12.00 Wojciech Kozłowski — *Konforemność odwzorowania różniczki*

12.05–12.20 — *przerwa na herbatę*

12.20–12.45 Edyta Bartnicka — *Nieunimodularna część prostej rzutowej*

12.50–13.15 Kamil Niedziałomski — *Geometria podrozmaitości poprzez skręcenie wewnętrzne*

13.20–13.45 Maciej Trokowski — *Problem Yamabe*

13.50 Zamknięcie Konferencji

Abstracts

Nieunimodularna część prostej rzutowej

Edyta Bartnicka

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
ul. Słoneczna 54, 10-710 Olsztyn
edytabartnicka@wp.pl

Streszczenie

Większość autorów rozważa prostą rzutową nad pierścieniem R jako zbiór wolnych podmodułów cyklicznych $R(a,b)$ generowanych przez pary dopuszczalne (lub unimodularne w przypadku pierścieni skończonych lub przemiennych). W szczególnych przypadkach punkty prostej rzutowej mogą być także reprezentowane przez pary niedopuszczalne (nieunimodularne).
Jeżeli para nieunimodularna zawiera się w jakimś podmodule cyklicznym generowanym przez parę unimodularną, wówczas nie generuje ona punktów prostej rzutowej. Istnieją jednak pierścienie, dla których nieunimodularne pary nie zawierają się w żadnym podmodule cyklicznym generowanym przez parę unimodularną. Nazywa się je wartościami oddalonymi. Występują one nad pierścieniami przemiennymi i nieprzemiennymi, ale tylko w drugim przypadku pewne z nich generują wolne podmoduły cykliczne, które tworzą nieunimodularną część prostej rzutowej. Podczas referatu zostaną podane warunki, jakie musi spełniać pierścień R, by występowały nad nim wartości oddalone i generowały punkty prostej rzutowej.

Literatura

[1] Veldkamp F.D.: „Geometry over rings", in „Handbook of Incidence Geometry", Editor F. Buekenhout, Amsterdam, Elsevier, 1995.

[2] Blunck A., Havlicek H.: „Projective Representations I. Projective lines over rings", Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.

[3] Hall J.L., Saniga M.: „Free Cyclic Submodules and Non-Unimodular Vectors", arXiv:1107.3050v2 [math.CO].

[4] McDonald B.R.: „Finite Rings with identity", New York: Marcel Dekker; 1974.

U-funkcje

Waldemar Cieślak

Katedra Matematyki Stosowanej, Politechnika Lubelska
ul. Nadbystrzycka 40 , 20-618 Lublin
w.cieslak@pollub.pl

Streszczenie

Rozważamy pewien dyfeomorfizm odwzorowujący otwarty prostokąt na wnętrze rozciętego pierścienia kołowego. Obrazem wykresu funkcji w kształcie litery U jest prosta styczna do wewnętrznego okręgu. Wykorzystując U-funkcje podamy nowy dowód twierdzenia Ponceleta, istotnie różniący się od znanych dowodów. Konstrukcja podana w dowodzie prawdopodobnie umożliwi rozszerzenie twierdzenia Ponceleta na szerszą klasę pierścieni.

Literatura

[1] Bos H. J. M., Kers C., Oort F., Raven D.W., *Poncelet's Closure Theorem*, Expos. Math. 5(1987) 289-364.

[2] Cieślak, W., Mozgawa W., *On Poncelet's closure theorem*, wysłane do czasopisma

[3] Cieślak, W., *The Poncelet annuli*, Beitr. Algebra Geom., 55(2014), 301-309,

Moduły foliacji wyznaczonych przez submersje sprzężone

Małgorzata Ciska-Niedziałomska
(Praca wspólna z Antonim Pierzchalskim)

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki
ul. Banacha 22, 90-238 Łódź
mciska@math.uni.lodz.pl,

Streszczenie

Moduł foliacji [3] jest uogólnieniem pojęcia ekstremalnej długości wprowadzonego przez Ahlforsa i Beurlinga [1]. Dla odpowiednich współczyników jest on niezmiennikiem konforemnym. W szczególności, iloczyn modułów ortogonalnych foliacji, które są konforemnie równoważne foliacjom produktowym jest równy jeden.

W referacje rozważamy pewne uogólnienie tego faktu [2]. Definiujemy parę submersji sprzężonych (zależnych od dwóch współczynników p i q), które w przypadku płaszczyzny są odwzorowaniami, odpowiednio, p i q–harmonicznymi. Pokazujemy, że iloczyn modułów foliacji wyznaczonych przez te submersje jest równy jeden. Ponadto podajemy zależność między funkcjami ekstremalnymi otrzymanych foliacji.

Literatura

[1] L. Ahlfors, A. Beurling, Conformal invariants and function–theoretic null–sets, Acta Math. 83 (1950), 101–129.

[2] M. Ciska, A. Pierzchalski, Modulus of level sets of conjugate submersions, preprint

[3] A. Pierzchalski, The k–module of level sets of differential mappings, Czechoslovakian–GDR–Polish School of Differential Geometry at Boszkowo 1978, Math. Inst. Polish Acad. Sci., Warsaw, 1979, 180–185.

Opis pewnych foliacji w przestrzeni sfer

Maciej Czarnecki

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki
ul. Banacha 22, 90-238 Łódź
maczar@math.uni.lodz.pl

Streszczenie

W wystąpieniu przedstawię sposoby opisu rodzin sfer w przestrzeni de Sittera. Rodziny takie mogą opisywać foliacje całkowicie umbilikalne w przestrzeni hiperbolicznej, a także powierzchnie kanałowe, a te z kolei foliować sferę S^3.

Praca wspólna z Rémi Langevinem i Szymonem Walczakiem.

Literatura

[1] M. Czarnecki, Sz. Walczak, *De Sitter space as a computational tool for surfaces and foliations*, Amer. J. Comp. Math. **3**(1B) (2013), 1–5.

[2] R. Langevin, P. G. Walczak, *Canal surfaces of* S^3, J. Math. Soc. Japan **64**(2) (2010), 659–682.

Pożytki z rączek

Bogusław Hajduk

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
ul. Słoneczna 54, 10-710 Olsztyn
oraz
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
50-384 Wrocław, pl. Grunwaldzki 2/4
bhmath@interia.pl

Streszczenie

Omówię podstawy teorii Morse'a-Smale'a, czyli rozkładów rozmaitości gładkich na rączki (handle decompositions), które opisują strukturę topologiczną związaną z funkcjami Morse'a. Omówię dwa zastosowania: do problemu istnienia metryk riemannowskich na rozmaitościach spin oraz do konstrukcji form kontaktowych.

Opiszę też przypadek m-rozkładów rozmaitości z brzegiem. To ostatnie pojęcie odpowiada m-funkcjom, czyli funkcjom na rozmaitościach z brzegiem, których punkty krytyczne we wnętrzu są niezdegenerowane a ograniczenie fnkcji na brzeg też ma tylko niezdegenerowane punkty krytyczne. To ostatnie pojęcie było badane przez Jankowskiego i Rubinszteina [JR], a potem przez Braesa w [B], m-rozkłady zostały wprowadzone w [H]. Ostatnio zainteresowanie tą tematyką przeżywa pewien renesans po pojawieniu się zastosowań do geometrycznej teorii monopoli [KM].

Literatura

[B] D. Braess, Morse-Theorie für berandete Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 208 (1974), 138–148.

[H] B. Hajduk, Minimal m-functions, Fund. Math. 111 (1981), 179–200.

[JR] A. Jankowski, R. Rubinsztein, Functions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary, Comment. Math. 16 (1972), 99–112.

[KM] P. Kronheimer, T. Mrowka, Monopoles and three manifolds, New Mathematical Monographs 10, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

Jeszcze o wielomianie $x^2 + x + 1$

Jan Jakóbowski

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
ul. Słoneczna 54, 10-710 Olsztyn
jjakob@matman.uwm.edu.pl

Streszczenie

Dla dowolnego ciała F skończonej charakterystyki, takiego że wielomian $x^2 + x + 1$ nie ma pierwiastka w F, konstruujemy pierścieniowe rozszerzenie z bazą 1, i, j, k. Dodawanie jest klasyczne (przestrzeń liniowa nad F), ale mnożenie elementów i, j, k zupełnie różni się od mnożenia kwaternionów (również znanych uogólnionych wersji), mimo założenia, że i, j, k są pierwiastkami wielomianu x^2+x+1, podobnie jak i, j, k są pierwiastkami wielomianu $x^2 + 1$ w kwaternionach Hamiltona. W konsekwencji otrzymujemy szeroką klasę pierścieni nieprzemiennych, nieizomorficznych z pierścieniami macierzy $M_{2\times2}(F)$. Każdy z tych pierścieni zawiera dzielniki zera, wśród nich idempotenty, gdzie liczba pierwszych i drugich zależy od tego czy -3 jest kwadratem w F czy nie. Wynik ten jest konsekwencją faktu: Dla $char(F) > 3$ równanie $x^2 - xy + y^2 = 0$ ma niezerowe rozwiązania w F dokładnie wtedy, gdy -3 jest kwadratem w F. Rozważamy pewne przykłady ilustrujące powyższe wyniki.

Literatura

[1] M. Aristidou, A. Demetre: “A note on quaternion rings”, International Journal of Algebra, Vol. 3, no. 15 (2009), 725-728.

[2] T. Y. Lam: “A First Course in Noncommutative Rings”, Springer-Verlag New York, Inc, 1991.

[3] C. J. Miguel, R. Serôdio: “On the structure of quaternion rings over $\mathbb{Z}_p$”, International Journal of Algebra, Vol. 5, no. 27 (2011), 1313-1325.

[4] R. S. Pierce: “Associative Algebras”, Springer, 1982.

Konforemność odwzorowania różniczki

Wojciech Kozłowski

Wydzial Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki
ul. Banacha 22, 90-238 Łódź
wojciech@math.uni.lodz.pl

Streszczenie

Niech (M, g_M) będzie rozmaitością riemannowską. Koneksja Levi-Civity ∇ pozwala rozłożyć drugą wiązkę styczną TTM na sumę prostą $TTM = H \oplus V$, gdzie V jest przestrzenią wektorów pionowych (tj. V jest jądrem różniczki naturalnego rzutowania $\pi : TM \to M$), natomiast H jest przestrzenią wektorów poziomych (tj. H jest jądrem operatora koneksji $K : TTM \to TM$). Metrykę g_{TM} na TM nazywamy naturalną, gdy $\pi : (TM, g_{TM}) \to (M, g_M)$ jest submersją riemannowską. Przykładem metryki naturalnej na TM jest metryka Sasakiego. Inny ważny przykład stanowi metryka Cheegera-Gromolla, wprowadzona J. Cheegera i D. Gromolla w kontekście badania zupełnych rozmaitości riemannowskich o nieujemnej krzywiźnie.
W ostatnich latach M. Benyounes, E. Loubeau i C. M. Wood wprowadzili klasę metryk naturalnych będących modyfikacją metryki Cheegera-Gromolla. Metryki te nazywamy metrykami typu Cheegera-Gromolla.

Rozważmy teraz odwzorowanie gładkie pomiędzy rozmaitościami riemannowskimi $f : (M, g_M) \to (N, g_N)$. Różniczka df działa pomiędzy ich wiązkami stycznymi. Wyposażmy wiązki styczne TM i TN w metryki typu Cheegera-Gromolla g_{TM} i g_{TN} odpowiednio.

Można postawić pytanie: Kiedy różniczka $df : (TM, g_{TM}) \to (TN, g_{TN})$ jest odwzorowaniem konforemnym?

Podczas referatu zostanie przybliżone pojęcie metryki typu Cheegera-Gromolla a także udzielona odpowiedź na pytanie postawione powyżej. Treść referatu oparta jest na wynikach badań uzyskanych przez autora wspólnie z K. Niedziałomskim.

Literatura

[1] M. Benyounes, E. Loubeau, C. M. Wood, "The Geometry of Generalised Cheeger-Gromoll Metrics", Tokyo J. of Math, Vol. 32, No. 2 (2009), 287-312.

[2] W. Kozłowski, K. Niedziałomski, "Conformality of a differential with respect to Cheeger-Gromoll type metrics", Geom. Dedicata Vol. 157, Issue 1, (2012), 227-237.

[3] W. Kozłowski, K. Niedziałomski, "Differential as a harmonic morphism with respect to Cheeger–Gromoll-type metrics", Ann. Glob. Anal. Geom. Vol. 37, Issue 4, (2010), 327-337.

The natural transformations between r-tangent and r-cotangent bundles over Riemannian manifolds

Jan Kurek[1], Włodzimierz Mikulski[2]

[1]Institute of Mathematics
Maria Curie-Sklodowska University
pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, Lublin
Poland
[1]kurek@hektor.umcs.lublin.pl

[2]Institute of Mathematics
Jagiellonian University
ul. S. Łojasiewicza 6, Kraków
Poland
[2]Wlodzimierz.Mikulski@im.uj.edu.pl

Abstract

If (M, g) is a Riemannian manifold, we have the well-known base preserving vector bundle isomorphism $TM \cong T^*M$ given by $v \to g(v, -)$ between the tangent TM and the cotangent T^*M bundles of M. In the present note, we generalize this isomorphism to the one $T^{(r)}M \cong T^{r*}M$ between the r-th order vector tangent $T^{(r)}M = (J^r(M, \mathbf{R})_0)^*$ and the r-th order cotangent $T^{r*}M = J^r(M, \mathbf{R})_0$ bundles of M. Next, we describe all preserving vector bundle maps $C_M(g) : T^{(r)}M \to T^{r*}M$ depending on a Riemannian metric g in terms of natural (in g) tensor fields on M.

References

[1] I. Kolář, P. W. Michor, J. Slovák: *Natural Operations in Differential Geometry*. Berlin: Springer-Verlag, 1993

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Fundations of Differential Geometry*. Vol. I: J. Wiley-Interscience, 1963

[3] D. B. A. Epstein: *Natural tensors of Riemannian manifolds*. J. Differential Geom. **10**, 631–645 (1975)

[4] I. Kolář, G. Vosmanská: *Natural transformations of higher order tangent bundles and jet spaces*. Čas. pěst. mat. **114**, 181–186 (1989)

[5] J. Kurek: *Natural transformations of higher order cotangent bundles*. Ann. Univ. Maria Curie-Sklodowska, sect. A, Vol. XIV, **10**, 83–88 (1991)

Ściśle 2-tranzytywne zbiory permutacji

Andrzej Matraś

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
ul. Słoneczna 54, 10-710 Olsztyn
matras@uwm.edu.pl

Streszczenie

Znany jest opis ściśle 2-tranzytywnych grup permutacji. Jednak gdy zbiór taki nie tworzy grupy, nie ma pełnego opisu. Wprowadza się pewne warunki, przy których taki opis jest możliwy. Z każdym ściśle 2-tranzytywnym zbiorem permutacji stowarzysza się strukturę incydencyjną zwaną 2-strukturą. Zostaną pokazane ostatnie wyniki dotyczące tych struktur oraz ich związek ze zbiorami ściśle 3-tranzytywnych permutacji.

Literatura

[1] H. Karzel, J. Kosiorek, A. Matraś: „Symmetric 2-Structures, a Classification", Results of Math., 2014.

[2] H. Karzel, J. Kosiorek, A. Matraś: „A Representation of a Points Symmetric 2-Structure by a Quasi-Domain", Results of Math., 2014.

Uogólnienie twierdzenia Mellisha

Witold Mozgawa

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki,
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
pl. M. Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin
mozgawa@poczta.umcs.lublin.pl

Streszczenie

Zamkniętą, regularną, prostą, dodatnio zorientowaną krzywą płaską C klasy C^2 nazywamy *owalem*. Rozważmy układ współrzędnych na płaszczyźnie o początku O leżącym we wnętrzu owalu C. Niech $p(t)$, $t \in [0, 2\pi[$ będzie odległością punktu O od linii stycznej $l(t)$ do krzywej C prostopadłej do wektora $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Parametryzacja krzywej C w języku funkcji podparcia $p(t)$ jest dana wzorem

$$z(t) = p(t)e^{it} + p'(t)ie^{it}.$$

Funkcja podparcia p może być rozszerzona do funkcji okresowej o okresie 2π określonej na całej prostej $\mathbb{R}$.

W 1930 roku A. P. Mellish w pracy [17] wykazał następujące

Twierdzenie 1. *Następujące stwierdzenia są równoważne:*

a) owal jest o stałej szerokości,

b) owal jest o stałej średnicy,

c) wszystkie normalne owalu są podwójne,

d) suma promieni krzywizny owalu w punktach $z(t)$ i $z(t + \pi)$ jest stała.

Ponadto,

e) wszystkie owale o tej samej stałej szerokości d mają tę samą długość

$$L = \pi d.$$

Jeśli dla dowolnego, ustalonego $\alpha \in (0, \pi\rangle$ wprowadzimy oznaczenie

$$q(t, \alpha) = z(t) - z(t + \alpha),$$

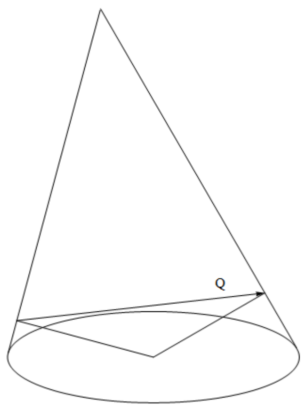
to liczbę

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{2|q(t)|^2 - [q(t), q'(t)]}{|q(t)|^3}$$

będziemy nazywać *sinus-krzywizną owalu* C. Ponadto, owal taki, że $\kappa_\alpha \equiv const$ będzie nazywany *owalem o stałej α-szerokości.* Ponieważ ta definicja ma sens dla $\alpha = \pi$, to w przypadku owalu o stałej π-szerokości będziemy mówić, że owal ma stałą szerokość w nieskończoności. Dla tych krzywych wykazujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Owal C jest krzywą o stałej szerokości w nieskończoności wtedy i tylko wtedy, gdy jest owalem o stałej szerokości.*

Następnie wprowadzamy wektor $Q(t, \alpha)$ wyznaczony przez rzuty początku układu współrzędnych na styczne do C w punktach $z(t)$ i $z(t + \alpha)$, jak pokazano na poniższym rysunku.



Rys. 1. Konstrukcja wektora Q

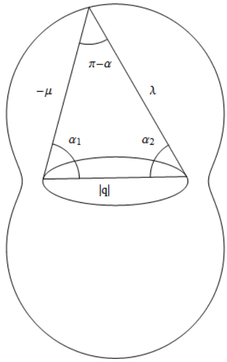
Po pewnych obliczeniach otrzymujemy, że

$$Q(t, \alpha) = (p(t + \alpha)\cos\alpha - p(t))\, e^{it} + p(t + \alpha)\sin\alpha\; ie^{it}.$$

Liczbę $d_\alpha(t) = |Q(t, \alpha)| = \sqrt{p(t)^2 + p^2(t + \alpha) - 2p(t)p(t + \alpha)\cos\alpha}$ będziemy nazywać α-rozpiętością owalu C w punkcie t. Zauważmy, że jeśli $\alpha = \pi$, to $d_\pi(t) = p(t) + p(t + \pi)$.

Określmy funkcję podparcia $P(t) = \frac{|Q(t,\alpha)|}{2}$. Wtedy *$\alpha$-jeżem stowarzyszonym* z owalem C dla kąta α nazywamy krzywą $H_\alpha(t) = P(t)e^{it} + P'(t)ie^{it}$.

Korzystając z tych definicji i z oznaczeń na rys. 1 i 2 możemy sformułować główne twierdzenie.



Rys. 2. Oznaczenia do głównego twierdzenia

Twierdzenie 3. *Dla ustalonego kąta $\alpha \in]0,\pi]$ stwierdzenia:*

a) owal jest o stałej α-szerokości;

b) owal jest o stałej α-rozpiętości;

c) wszystkie wektory $q(t,\alpha)$ są równoległe do wektorów $Q(t,\alpha)$;

d) wyrażenie

$$\frac{1}{|q(t,\alpha)|^2}\left(2|q(t,\alpha)| - \left(\frac{\sin\alpha_1}{k(t+\alpha)} + \frac{\sin\alpha_1}{k(t)}\right)\right)$$

jest stałe;

są równoważne.

e) Dla każdej krzywej o tej samej stałej α-szerokości a stowarzyszone jeże H_α mają tę samą długość L daną wzorem

$$L = \pi a.$$

Literatura

[1] Ait-Haddou, R., Herzog, W., Biard, L., *Pythagorean-hodograph ovals of constant width*, Comput. Aided Geom. Des. 25, No. 4-5, 258-273 (2008).

[2] Anghel, N., *A maximal parallelogram characterization of ovals having circles as orthoptic curves*, Forum Geom. 10, 21-25, electronic only (2010).

[3] Araújo, P. V., *Representation of curves of constant width in the hyperbolic plane*, Port. Math. 55, No.3, 355-372 (1998).

[4] Benko, K., Cieślak, W. Góźdź, S., Mozgawa W., *On isoptic curves*, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, Ser. Nouă, Mat. 36, No.1, 47-54 (1990).

[5] Bonnesen, T., Fenchel, W., *Theory of convex bodies.*, Transl. from the German and ed. by L. Boron, C. Christenson and B. Smith, with the collab. of W. Fenchel. Moscow, Idaho (USA): BCS Associates. IX, (1987).

[6] Cieślak, W., Miernowski, A., Mozgawa W., *Isoptics of a closed strictly convex curve*, Global differential geometry and global analysis, Proc. Conf., Berlin/Ger. 1990, Lect. Notes Math. 1481, 28-35 (1991).

[7] Cieślak, W., Mozgawa, W., *On rosettes and almost rosettes*, Geom. Dedicata 24, 221-228 (1987).

[8] Csima, G., Szirmai, J., *Isoptic curves in the hyperbolic plane*, Stud. Univ. Žilina, Math. Ser. 24, No. 1, 15-22 (2010).

[9] Green, J. W., *Sets subtending a constant angle on a circle*, Duke Math. J. 17, 263-267 (1950).

[10] Hilton, H.; Colomb, R. E., *On orthoptic and isoptic loci*, American J. Math., 39, 86-94 (1917).

[11] Klamkin, M.,S., *Conjectured isotropic characterization of a circle*, Am. Math. Mon. 95, No.9, 845 (1988).

[12] Kunkli, R., Papp, I., Hoffmann, M., *Isoptics of Bézier curves*, Comput. Aided Geom. Des. 30, No. 1, 78-84 (2013).

[13] Langevin, R., Levitt, G., Rosenberg, H., *Hérissons et multihérissons (enveloppes parametrées par leur application de Gauss)*, Singularities, Banach Cent. Publ. 20, 245-253 (1988).

[14] Makai, E. jun.; Martini, H., *A new characterization of convex plates of constant width*, Geom. Dedicata 34, No.2, 199-209 (1990).

[15] Martinez-Maure, Y., *Hedgehogs of constant width and equichordal points*, Ann. Pol. Math. 67, No.3, 285-288 (1997).

[16] Matsuura, S., *On non-convex curves of constant angle*, Komatsu, Hikosaburo (ed.), Functional analysis and related topics, 1991. Proceedings of the international conference in memory of Professor Kôsaku Yosida held at RIMS, Kyoto University, Japan, July 29-Aug. 2, 1991. Berlin: Springer-Verlag. Lect. Notes Math. 1540, 251-268 (1993).

[17] Mellish, A. P., *Notes on differential geometry*, Ann. Math. (2) 32, 181-190 (1931).

[18] Michalska, M., *A sufficient condition for the convexity of the area of an isoptic curve of an oval* Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 110, 161-169 (2003).

[19] Miernowski, A., *Parallelograms inscribed in a curve having a circle as* $\frac{\pi}{2}$*-isoptic*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 62, 105-111 (2008).

[20] Mozgawa, W.; Miernowski, A., *On the curves of constant relative width*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 107, 57-65 (2002).

[21] Neville, E. H., *The isoptic point of a quadrangle*, J. Lond. Math. Soc. 16, 173-174 (1941).

[22] Nitsche, J. C. C., *Isoptic characterization of a circle. (Proof of a conjecture of M. S. Klamkin.)*, Am. Math. Mon. 97, No.1, 45-47 (1990).

[23] Santaló, L. A., *Integral geometry and geometric probability*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Vol. 1, Section: Probability. Reading, Mass. etc.: Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program. XVII, (1976).

[24] Su, B., *Lectures on differential geometry*, Transl. from Chinese by K. C. Chang. Singapore: World Scientific Publishing Company. v, 149 pp. (1980).

[25] Taylor, C., *Note of a theory of orthoptic and isoptic loci*, Lond. R. S., Proc. XXXVII, 138-141 (1884).

[26] Tennison, R. L., *Smooth curves of constant width*, Math. Gaz. 60, 270-272 (1976).

[27] Wegner, B., *Analytic approximation of continuous ovals of constant width*, J. Math. Soc. Japan 29, 537-540 (1977).

Geometria podrozmaitości poprzez skręcenie wewnętrzne

Kamil Niedziałomski

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki
ul. Banacha 22, 90-238 Łódź
kamiln@math.uni.lodz.pl,

Streszczenie

Niech N bedzie rozmaitością riemannowską, $O(N)$ wiązką baz ortonormalnych na N. Podrozmaitość $M \subset N$ wyznacza subwiązkę $O(M, N)$ w $O(N)|M$ baz ortonormalnych dostosowanych do M. Rozważając naturalny rozkład algebr Liego grup strukturalnych $O(n)$ i $G = O(n, m)$ obu wiązek, forma koneksji pochodząca od koneksji Levi–Civity na N wyznacza cięcie wiązki dołączonej tzw. skręcenie wewnętrzne [1,3]. Skręcenie wewnętrzne możemy również utożsamiać z różnicą koneksji Levi–Civity i G–koneksji.

W referacje pokażemy związek geometrii podrozmaitości z własnościami skręcenia wewnętrznego [2].

Literatura

[1] A. Gray, L. Hervella, The Sixteen Classes of Almost Hermitian Manifolds and Their Linear Invariants, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 123 (1980), 35–58.

[2] K. Niedziałomski, On the frame bundle adapted to a submanifold, preprint, arXiv, http://arxiv.org/abs/1311.6172

[3] F. Tricerri, Localy homogeneous Riemannian manifolds, Rend. Sem. Mat. Univ. Poi. Torino Vol. 50 (1992), 411–426.

Zastosowanie geometrii w budowaniu scenografii teatralnej

Ada Pałka

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński
ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków
ada.palka@uj.edu.pl

Streszczenie

W XVII i XVIII wieku pojawiło się wiele traktatów, których autorami byli matematycy-geometrzy a zarazem architekci i budowniczy. Część z nich dotyczyło tematyki perspektywy, quadratur, budowania scen teatralnych czy też fortyfikacji. Projekt sceny i scenografii teatralnej wymagał od budowniczego nie tylko zmysłu architektonicznego ale także artystycznego aby uzyskać na scenie efekt iluzji i wywrzeć wrażenie na widzach. W trakcie referatu zostaną przedstawione XVII w. zagadnienia i konstrukcje scen i scenografii teatralnej a także współczesne wykorzystanie matematyki w jej projektowaniu.

Literatura

[1] Kirsti Andersen: „The Geometry of an Art: The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences)", New York, 2007.

[2] Georg Fuchs: „Scena przyszłości", Gdańsk, 2004.

[3] Joseph Furttenbach: „O budowie teatrów", Gdańsk, 2009.

[4] Dan Pedoe: „Geometry and the Visual Arts", New York, 1976.

[5] Nicola Sabbattini: „Pratica di fabricar scene e machine ne' teatri", 1638.

[6] Nicola Sabbattini: „Praktyka budowania scen i machin teatralnych", Gdańsk, 2008.

The constructions of general connections on second jet prolongation

Mariusz Plaszczyk

Wydział Matematyki Fizyki i Informatyki,
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
pl. M. Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin
mariusz.piotr.plaszczyk@gmail.com

Streszczenie

Prof. I.Kol*ář* w monografii I.Kol*ář*, P.W.Michor, J.Slov*á*k „Natural operations in differential geometry" udowodnił, że wszystkie operatory $\mathcal{FM}_{m,n}$-naturalne przekształcające koneksje ogólne na rozmaitościach włóknistych $Y \to M$ oraz klasyczne koneksje liniowe bez skręcenia na rozmaitości bazowej M w koneksje ogólne na wiązce pierwszego przedłużenia dżetowego $J^1Y \to M$ rozmaitości włóknistej $Y \to M$ tworzą 1-parametrową rodzinę $tP + (1-t)\mathcal{J}^1, t \in \mathbb{R}$, gdzie $P, \mathcal{J}^1$ są pewnymi operatorami.

W mojej pracy uogólniam powyższy problem na przypadek wiązki drugiego przedłużenia dżetowego $J^2Y \to M$ rozmaitości włóknistej $Y \to M$. Wyznaczam wszystkie operatory $\mathcal{FM}_{m,n}$-naturalne D przekształcające koneksje ogólne Γ na rozmaitościach włóknistych $Y \to M$ oraz klasyczne koneksje liniowe bez skręcenia ∇ na rozmaitości bazowej M w koneksje ogólne $D(\Gamma, \nabla)$ na wiązce drugiego przedłużenia dżetowego $J^2Y \to M$ rozmaitości włóknistej $Y \to M$.

W referacie przedstawię twierdzenie klasyfikujące stwierdzające, że wszystkie operatory $\mathcal{FM}_{m,n}$-naturalne powyższego typu stanowią kombinację afiniczną pewnych trzech operatorów $\mathcal{FM}_{m,n}$-naturalnych $\mathcal{J}^2_{(A)}, \mathcal{J}^2_{[1]}, \mathcal{J}^2_{[2]}$, które zostały skonstruowane w sposób geometryczny. Główna idea długiego dowodu tego twierdzenia polega na zastosowaniu struktury afinicznej wiązki dżetowej $J^1J^2Y \to J^2Y$ oraz zredukowaniu rozważanych operatorów naturalnych do znalezienia pewnych odwzorowań niezmienniczych.

Literatura

[1] Doupovec, M., Mikulski, W., *Holonomic extension of connections and symmetrization of jets*, Rep. Math. Phys. **60** (2007), 299–316.

[2] Ehresmann Ehresmann, C., *Sur les connexions d'ordre supérieur*, Atti del V. Cong. del'Unione Mat. Italiana, 1955, Cremonese, Roma, 1956, 344–346.

[3] Kolář, I., *Higher order absolute differentiation with respect to generalized connections*, Differential Geometry, Banach Center Publ. 12, PWN-Polish Sci. Publ., Warszawa, 1984, 153–162.

[4] Kolář, I., Michor, P. W., Slovák, J., *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] Kolář, I., *Prolongations of generalized connections*, Differential Geometry (Budapest, 1979), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 31, North-Holland, Amsterdam, 1982, 317–325.

[6] Kolář, I., *On the torsion free connections on higher order frame bundles*, New Developments in Differential Geometry (Debrecen, 1994), Proceedings (Conference in Debrecen), Math. Appl., 350, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996, 233–241.

[7] Kurek, J., Mikulski, W., *On prolongations of projectable connections*, Ann. Polon. Math. **101** (2011), no. 3, 237–250.

[8] Mikulski, W., *On "special" fibred coordinates for general and classical connections*, Ann. Polon. Math. **99** (2010), 99–105.

[9] Mikulski, W., *Higher order linear connections from first order ones*, Arch. Math. (Brno) **43** (2007), 285–288.

Formalność orbifoldów Kaehlera i rozmaitości Sasakiego

Aleksy Tralle

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
ul. Słoneczna 54, 10-710 Olsztyn
tralle@matman.uwm.edu.pl

Streszczenie

W 2009 r. Boyer i Galicki zadali pytanie, czy wtórne operacje kohomologiczne określają przeszkody do istnienia struktury Sasakiego na zwartej jednospójnej rozmaitości. W referacie udzielę odpowiedzi twierdzącej. Wynik uzyskałem wspólnie z Indranilem Biswasem, Marisą Fernandez i Vicente Munozem.

Problem Yamabe

Maciej Trokowski

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń
maciej.trokowski@mat.umk.pl

Streszczenie

Niech $(X;g)$ będzie ustaloną rozmaitością riemannowską. Klasyczny problem Yamabe pyta o istnienie metryki o stałej krzywiźnie skalarnej konforemnej z metryką g. Obecnie wiadomo, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. W trakcie referatu naszkicujemy związek pomiędzy problemem Yamabe a funkcjonałem Hilberta–Einsteina oraz pokażemy, jak wykorzystać teorię bifurkacji do uzyskania nowych informacji o problemie Yamabe na produktach rozmaitości zwartych.

Literatura

[1] M. P. Do Carmo: „Riemannian Geometry", Birkhauser, Boston, 1992.

[2] L. L. De Lima, P. Piccione, M. Zedda: „On Bifurcation of Solutions of the Yamabe Problem in Product Manifolds", 2011.

[3] Z. Błaszczyk, S. Rybicki, M. Trokowski, "Global Bifurcation of Solutions of the Yamabe Problem in Product Manifolds", w przygotowaniu.

Wzory całkowe dla krzywych dualnych do izooptyk wewnętrznych oraz ewolutoid owali

Magdalena Skrzypiec

Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
Plac Marii Curie Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin
mskrzypiec@umcs.lublin.pl

Streszczenie

Rozważamy dwie ewolucje owali: izooptyki wewnętrzne i ewolutoidy. Badane krzywe mogą być nieregularne, mieć osobliwości typu „cusp" i przecinać się parami. Przenosimy zatem rozważania do przestrzeni dualnej, w nadziei znalezienia łatwiejszych do uchwycenia własności badanych ewolucji. Każda z rozważanych krzywych jest jeżem i możemy użyć funkcji podparcia do jej parametryzacji. Znajomość funkcji podparcia pozwala też na znalezienie dla każdej rozważanej krzywej jej krzywej dualnej w przestrzeni prostych $\Gamma = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Otrzymane ewolucje krzywych dualnych wypełniają dyfeomorficznie pewne obszary na cylindrze Γ zależne od wyjściowego owalu. Tworzymy dla nich wzory całkowe typu Croftona.

Literatura

[1] Langevin, R., *Introduction to integral geometry*, 21^o Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). iv, 160 p. (1997).

[2] Martini, H.; Mozgawa, W., *An integral formula related to inner isoptics,* Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **125** (2011), 39-49.

[3] Mozgawa, W., *Integral formulas related to ovals,* Beiträge Algebra Geom. **50** (2009), 555–561.

[4] Mozgawa, W.; Skrzypiec, M., *Crofton formulas and convexity condition for secantoptics*, Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin **16**, No. 3, 435-445 (2009).

[5] San Santalo, L., *Integral geometry and geometric probability,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Reading, Mass., 1976.

Optymalny transport w badaniu geometrii foliacji zwartych

Szymon M. Walczak

Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki
ul. Banacha 22, 90-238 Łódź
szymon.walczak@math.uni.lodz.pl

Streszczenie

Odległość dwóch punktów $x, y \in M$ w metryce rozproszonej wzdłuż foliacji $\mathcal{F}$ w chwili $t > 0$ na zwartej rozmaitości riemannowskiej (M, g) zdefiniowana jest jako odległość Wassersteina miar Diraca δ_x i δ_y rozproszonych, odpowiednio, wzdłuż liści L_x i L_y. Dokładniej,

$$\mathrm{D}_t d(x, y) = d_W(\mathrm{D}_t \delta_x, \mathrm{D}_t \delta_y),$$

gdzie D_t oznacza sfoliowany operator rozpraszania.

W wystąpieniu przedstawiony zostanie warunek konieczny zbieżności (w topologii Wassersteina-Hausdorffa) rodziny $(M, \mathrm{D}_t d)$ na rozmaitoĹści z foliacją zwartą, który dostarcza pewnych informacji dotyczących geometrii foliacji.

Literatura

[1] R. Edwards & K. Millett & D. Sullivan, *Foliations with all leaves compact*, Topology 16 (1977), 13-32.

[2] C. Villani, *Optimal Transport, Old and New*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Vol. **338**, Springer-Verlag, 2009.

[3] C. Villani, *Topics in optimal transportation*, American Mathematical Society, 2003.

Porównanie różnych konstrukcji uogólnionych nakryć opartych na uniwersalnej przestrzeni ścieżek

Andreas Zastrow

Instytut Matematyki, Uniwersytet Gdański
ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk
zastrow@mat.ug.edu.pl

Współautorzy:
Žiga Virk (Uniwersytet w Lublanie)
Álvaro Sánchez González (Uniwersytet Complutense w Madrycie)

Streszczenie

Pomysł, aby uogólnić teorię nakryć jest dość stary. Pierwszą pracę proponującą konstrukcję w tym sensie napisano już w latach sześćdziesiątych XX w. Odtąd, zależnie od tego jakie własności klasycznych nakryć powinny być utrzymane, a z jakich można zrezygnować, przedstawiono kilka nierównoważnych definicji. Jedna z nich oparta jest na pomyśle wykorzystania w zasadzie tej samej, co w klasycznym przypadku, konstrukcji przez „uniwersalną przestrzeń ścieżek”[2] i jednoczesnym zaakceptowaniu przestrzeni spełniających słabsze warunki. W tej koncepcji dotyczącej uogólnionych przestrzeni nakrywających, dla których proponowano różne sposoby zdefiniowania topologii, istotne było to, by w klasycznym lokalnie łukowo spójnym i półlokalnie jednospójnym przypadku otrzymywać tę samą topologię klasycznych przestrzeni nakrywających. Podprzestrzeń uniwersalnej przestrzeni ścieżek zawierająca te ścieżki, które wracają do punktu bazowego jest grupą podstawową, która począwszy od pracy Bissa ([1]) z 2002 r. jest rozpatrywana jako obiekt mający oprócz swojej algebraicznej struktury również strukturę topologiczną. Praca Bissa, chociaż zawiera kilka błędów, może dlatego liczyć się jako wpływowa; zaś zaproponowane przez niego pojęcie „grupa podstawowa topologiczna”, które było odtąd dyskutowane w kilku pracach i uogólnione do wyższych wymiarów jest tylko grupą quasitopologiczną. Wprowadzamy pięć różnych definicji pozwalających topologizować uniwersalną przestrzeń ścieżek celem otrzymania uogólnionych przestrzeni nakrywających. Są one uogólnieniami zaproponowanych wcześniej w literaturze definicji dla grupy podstawowej topologicznej. Referat będzie głównie opisywać różnice pomiędzy definicjami

topologii poprzez konstrukcje przykładów, gdzie rozpatrywana przestrzeń jest topologizowana na różne sposoby. W szczególności będzie podkreślone to, że topologia zaproponowana w [2] i [3] jest najsilniejsza a zatem umożliwia konstruowanie wielu uogólnionych przestrzeni nakrywających. Będzie również podkreślone to, że „topologia lassaź [4] i topologia indukowana przez topologię zwarto-otwartą chociaż wyglądają na pierwszy rzut oka inaczej, mają po dokładniejszym zbadaniu podobną naturę, jednakże, ponieważ jedna z nich jest zdefiniowana przez topologię naszej przestrzeni a druga przez topologię uniwersalnej przestrzeni ścieżek, topologie te w przypadku ogólnym są nieporównywalne.

Literatura

[1] D. K. Biss: "The topological fundamental group and generalized covering spaces", Topology and its Applications 124 (2002), 355–371.

[2] W. A. Bogley, A. J. Sieradski: "Universal path spaces", preprint, http://people.oregonstate.edu/∼bogleyw/.

[3] H. Fischer, A. Zastrow: "Generalized universal covering spaces and the shape group", Fund. Math. 197 (2007), 167–196.

[4] N. Brodsky, J. Dydak, B. Labuz, A. Mitra: "Covering maps for locally path connected spaces", Fundamenta Mathematicae 218 (2012).